

Open Access

Recibido:

9 noviembre de 2018

Aceptado:

12 febrero de 2019

Publicado:

1 julio de 2019

Correspondencia:

dsalinas@jdc.edu.co

DOI:

<https://doi.org/10.17081/invinno.7.2.3172>



© Copyright: Investigación e Innovación en Ingenierías

Resumen

Objetivo: Proponer un método innovador y práctico para realizar el análisis estructural de armaduras con la intención de facilitar y simplificar el análisis estructural, y de esta forma constituirlo en una herramienta alterna de análisis de este tipo de estructuras. **Metodología:** Primero se presenta la fundamentación analítica y conceptual del tema. Seguidamente, se propone un procedimiento paso a paso, ejecutado sobre una nueva representación paramétrica, que simplifica el problema a resolver. Luego se desarrolla un ejemplo de análisis de una ménsula de concreto reforzado, la cual fue idealizada con el método de la biela. Finalmente, y con la intención de comparar la simplicidad y tiempo de solución del método propuesto, este es comparado con una solución analítica tradicional. **Resultados:** La metodología propuesta simplifica el análisis estructural de armaduras, además de ser eficiente, confiable y versátil. El método requiere, en concreto, un menor tiempo de solución y cálculos en comparación con los métodos analíticos tradicionales de solución de sistemas lineales de ecuaciones. **Conclusiones:** El método rotacional es apropiado para realizar el análisis estructural de armaduras, pues simplifica la solución analítica de este tipo de estructuras. El método rotacional es más versátil y eficiente, y puede usarse en el análisis estructural de armaduras estáticamente determinadas.

Palabras claves: Análisis estructural de armaduras, armaduras estáticamente determinadas, métodos de análisis estructurales simplificados.

Abstract

Objective: This paper aims to submit an innovative and analytical approach to perform an analysis of truss structures. The objective is to simplify the structural analysis and also become an alternative option for the analysis of this type of structures. **Methodology:** As first step, conceptual and analytical foundations are submitted. As follows, a step-by-step procedure on a new parametric representation, is proposed making the original problem easier to solve. Then an example of a reinforced corbel which is idealized by strut and tie model is submitted. Finally, simplicity and solution time of the proposed methodology, are compared with the traditional analytical solution. **Results:** The proposed methodology make structural analysis of truss structures easier. At the same time, the alternate methodology suggested show how efficient, reliable and versatile is. The proposed methodology require least amount of time for solutions and calculations compared with traditional analytical solutions to solve linear system of equations commonly involved in the analysis of this particular structures. **Conclusions:** The rotational approach provides an alternate method in order to conduct the structural analysis of truss structures. This suggested method simplifies the analytical solution of this type of structures. The rotational method is more versatile and efficient, especially, when is compared with other traditional analytical methodologies to solve linear system of equations. This approach can be used as an alternated method to conduct the structural analysis of statically-determined truss structures.

Keywords: Structural analysis, statically-determined truss structures, simplified structural analysis methods.

Como citar (IEEE): D. Salinas, "Método rotacional para el análisis estructural de armaduras", *Investigación e Innovación en Ingenierías*, vol. 7, n°. 2, 2019. DOI: <https://doi.org/10.17081/invinno.7.2.3172>

Introducción

El análisis y diseño de armaduras hace parte de la fundamentación básica y conceptual en la formación de ingenieros civiles y mecánicos del mundo. Una armadura consiste en una serie de elementos interconectados entre sí, los cuales se encuentran doblemente articulados. Su función es resistir las cargas externas a través de acciones internas de tensión y compresión, que se evalúan a partir de relaciones constitutivas uniaxiales sencillas [1]. Las armaduras son usadas principalmente en techos, instalaciones industriales y puentes.

La importancia de realizar competentemente el análisis y diseño estructural de armaduras no se restringe únicamente a la existencia física de este sistema estructural. De hecho, problemas complejos en ingeniería estructural, tales como análisis y diseño lineal y no-lineal de elementos estructurales, construidos en concreto reforzado, pueden ser representados de una forma práctica y sencilla, a través de la transformación de estos elementos estructurales en armaduras que basan su comportamiento en simplificadas relaciones constitutivas uniaxiales.

Ahora bien, las metodologías de idealización estructural basadas en armaduras para representar componentes en concreto reforzado han estado presente a lo largo del tiempo [2,3,4,5,6,7]. Lo particular es que, en los últimos años, investigadores y académicos han usado de forma exitosa modelos basados en la idealización estructural con armaduras, conocidos en la literatura como “Lattice Models”, para capturar la respuesta no-lineal bidimensional y tridimensional de estructuras [8,9,10,11,12,13].

La motivación para usar la idealización estructural de elementos en concreto reforzado a través de armaduras tiene que ver, principalmente, con la resolución de problemas de diseño de elementos estructurales que evidencian irregularidad interna en la distribución de esfuerzos y deformaciones, lo que imposibilita utilizar la teoría clásica de análisis a flexión (Teoría de Euler-Bernoulli). En la literatura, estas secciones son conocidas como regiones con campo perturbado de esfuerzos y deformaciones. Ejemplos de este tipo de secciones son: vigas de gran altura, ménsulas, zonas de anclaje en vigas postensadas, entre otros.

Por todo lo anteriormente expresado, el análisis competente de armaduras es imperativo tanto para estudiantes de ingeniería como para profesionales e investigadores que usan esta forma versátil de idealización estructural para resolver problemas idealizados o reales en Ingeniería Estructural. Adicionalmente, en el ejercicio académico y profesional, resulta conveniente el manejo de un método práctico y alternativo para calcular o verificar de

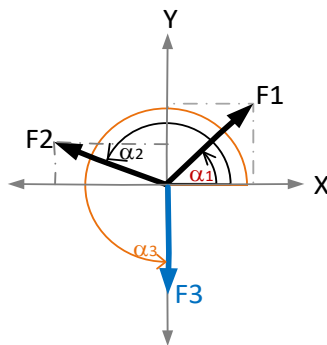
una forma eficaz la magnitud de las fuerzas internas desarrolladas en elementos estructurales de armaduras.

En las siguientes secciones se presenta, ejemplifica y valida el método propuesto, que puede constituirse en una alternativa valiosa de análisis en programas de pregrado.

El “método rotacional” para el análisis estructural de armaduras

Considérese el diagrama de cuerpo libre de un nudo perteneciente a una armadura o un sistema de fuerzas actuando en un punto como se muestra en la Figura 1. Las fuerzas “F1” y “F2” son desconocidas, mientras que la fuerza “F3” y las direcciones de las líneas de acción de todas las fuerzas son conocidas. Es pertinente aclarar que la fuerza “F3” puede ser, en efecto, una fuerza o puede representar la fuerza resultante de varias fuerzas concurrentes que actúan en el mismo punto, las cuales han sido reemplazadas por una acción única que produce el mismo efecto de las demás fuerzas.

Figura 1. Diagrama de cuerpo libre de fuerzas actuando en el nodo de una armadura

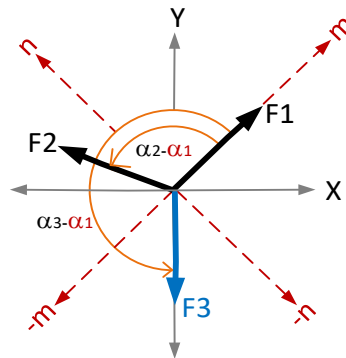


De lo representado en la Figura 1, es evidente que las incógnitas son las fuerzas “F1” y “F2”, las cuales deben ser halladas a partir de la fuerza “F3”, y de los ángulos α_1 , α_2 y α_3 , a través de la aplicación de condiciones de equilibrio. Nótese que el ángulo de dirección de cada fuerza ha sido barrido desde el eje “X” del primer cuadrante con la intención de utilizar las propiedades del círculo goniométrico en la determinación automática de la dirección de las componentes rectangulares de cada fuerza.

Por otra parte, cabe precisar que las fuerzas “F1” y “F2” tienen dos componentes rectangulares sobre los ejes coordenados “X” y “Y”. De la fundamentación en mecánica de cuerpos rígidos se sabe que la solución analítica del problema presentado en la Figura 1 corresponde, en este caso, a un sistema lineal de ecuaciones 2x2, el cual puede ser resuelto por cualquier método tradicional (igualación, sustitución, matrices), quedando la solución del problema en el campo matemático.

Si bien es cierto que la solución analítica del sistema lineal de ecuaciones no debería presentar mayor problema, el presente documento evidencia una solución alterna, que se basa en la rotación del plano tradicional cartesiano "X-Y" hasta tener una nueva representación paramétrica "m-n", tal y como se aprecia en la Figura 2. Como su nombre lo indica, el método rotacional propone rotar, por tanto, un plano imaginario cartesiano "m-n", que coincide inicialmente con el plano "X-Y" hasta una nueva localización, donde el nuevo sistema coordenado coincide con la línea de acción de alguna de las incógnitas. Lo anterior permite simplificar el problema original a resolver. En tal sentido, en la Figura 2, también se aprecia que el plano cartesiano original fue girado a una magnitud equivalente al ángulo α_1 , en un giro realizado en el sentido contrario a las manecillas del reloj, lo cual hace que el eje "m" coincida con la línea de acción de la fuerza "F1".

Figura 2. Representación paramétrica propuesta



La nueva representación paramétrica permite simplificar el sistema a resolver, puesto que la rotación del plano cartesiano "X-Y" transforma el problema original, que inicialmente constaba de 4 componentes rectangulares desconocidos, en un problema equivalente, pero simplificado sobre el plano "m-n" que tiene 3 componentes rectangulares desconocidos, ya que el cuarto componente es forzado a ser igual a cero por la coincidencia del plano "m-n" con la línea de acción de una de las fuerzas desconocidas. El problema representado sobre el plano "m-n" conlleva una solución manual casi directa sobre el plano "m-n", la cual involucra una reducción significativa en el tiempo y en los cálculos algebraicos en comparación con la solución algebraica tradicional del sistema lineal de ecuaciones.

Por conveniencia, se propone hacer la manipulación y representación de los datos a través de una implementación tabular fundamentada en tres propósitos: (i) presentar de una forma organizada y sistemática el problema a resolver, (ii) resolver el sistema lineal de una forma rápida, sencilla e intuitiva, y (iii) explotar la condición de equilibrio sobre los ejes coordenados "m-n", dado que la sumatoria de las columnas de las componentes rectangulares sobre los ejes "m-n" debe ser cero, y por lo tanto resulta sencillo calcular el desbalance para equilibrar el sistema. Dicha

representación tabular garantiza el cumplimiento de equilibrio de una forma eficiente. La Tabla 1 presenta la representación tabular propuesta. Nótese que por simplicidad en el manejo automático de los signos de las componentes rectangulares de todas las fuerzas, los ángulos son barridos inicialmente desde el primer cuadrante del eje “X” y subsecuentemente son evaluados en función a la localización deseada de la nueva representación paramétrica “m-n”. Para el caso mostrado en la Figura 2, los ángulos son recalculados y expresados desde el primer cuadrante del eje “m”.

Tabla 1. Entrada de datos propuesta y secuencia de cálculos requerida para resolver el sistema

F	Magnitud	Angulo	$F_m = F \cos(\alpha)$	$F_n = F \sin(\alpha)$
F1	(5)	$\alpha_1 - \alpha_1$	(4)	0
F2	(2)	$\alpha_2 - \alpha_1$	(3)	(1)
F3	F3	$\alpha_3 - \alpha_1$	$F_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_1)$	$F_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)$
Σ			$\Sigma=0 ?$	$\Sigma=0 ?$

La Tabla 1 expresa el problema sobre el plano “m-n”, es decir, la secuencia lógica de cálculos manuales para garantizar que la sumatoria de fuerzas respecto al plano “m-n” sea cero. Tal es la secuencia que se relaciona con números encerrados entre paréntesis en la Tabla 1; al mismo tiempo coincide con el número de la ecuación que se relaciona enseguida:

$$F_{2n} = -(F_{3n}) \quad (1)$$

$$F_2 = \frac{F_{2n}}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (2)$$

$$F_{2m} = F_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (3)$$

$$F_{1m} = -(F_{2m} + F_{3m}) \quad (4)$$

$$F_1 = F_{1m} \quad (5)$$

Si bien es cierto que la solución analítica del problema, es decir, encontrar el valor de las magnitudes “F1” y “F2” a través de ecuaciones, puede obtenerse de forma directa, este tipo de soluciones puede considerarse como imprácticas. En especial desde el punto de vista de conceptualización estructural, toda vez que al aplicarse dichas expresiones de una forma automática y directa, no es posible ejercitar las habilidades analíticas implícitas en la solución de este tipo de problemas. Al mismo tiempo, la utilización directa de estas dos expresiones limitan la aplicación consistente de uno de los pilares esenciales en análisis estructural: el concepto de equilibrio. Por lo anterior, , a pesar de ser prácticas desde el punto de vista

matemático, las ecuaciones que solucionan directamente esas incógnitas carecen de significado físico para un usuario inadvertido del origen de las mismas, como ocurre con estudiantes universitarios de primeros semestres. Sin embargo, para respaldar lo anteriormente enunciado, se presentan las ecuaciones (6) y (7), al mismo tiempo que (13) y (22) que presentan una solución directa obtenida sobre los ejes coordenados “m-n” y “X-Y”, respectivamente.

Es evidente que la metodología propuesta reduce los cálculos matemáticos y se fundamenta en la aplicación práctica del concepto de equilibrio, lo que permite encontrar eficientemente las incógnitas de una forma clara y sencilla, en apenas una fracción del tiempo que tomaría resolver manualmente el sistema lineal de ecuaciones cuando se emplea alguno de los métodos analíticos tradicionales (igualación, sustitución, matricial).

$$F_1 = F_3 \frac{\text{sen}(\alpha_2 - \alpha_3)}{\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (6)$$

$$F_2 = -F_3 \frac{\text{sen}(\alpha_3 - \alpha_1)}{\text{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (7)$$

Procedimiento propuesto para el método rotacional

En las secciones anteriores, se presentó el proceso racional aplicado en el método rotacional. Ahora se establecerá un procedimiento que permita la implementación del método paso a paso, a saber:

Paso 1: Se realiza el diagrama de cuerpo libre del nudo asumiendo que las fuerzas internas desconocidas actúan a tensión; es decir, saliendo del nudo. Adicionalmente, se dibujan los ángulos de las fuerzas actuantes desde el primer cuadrante del eje “X”.

Paso 2: (Opcional) En el caso de que existan varias fuerzas de magnitud y dirección conocidas, deben reemplazarse por una única fuerza resultante, de acuerdo con la nomenclatura usada en la Fig. 1; pero si se trata de una única fuerza, esta es representada a través de la fuerza “F3”.

Paso 3: En el caso de que la línea de acción de “F1” o “F2” coincida con el eje “X” o “Y” se debe pasar al siguiente punto; en este caso se infiere que los ejes “X-Y” coincidirán con los ejes “m-n”. Pero, en caso contrario, es decir que las fuerzas internas desconocidas “F1” y “F2” tengan componentes rectangulares sobre los ejes “X-Y”, se ha de utilizar una nueva

representación paramétrica “m-n”, rotando el sistema de tal forma que un eje, sea el “m” o el “n”, coincida con la línea de acción de “F1”.

Paso 4: Se utiliza el formato tabular para ingresar los datos, de modo que los ángulos sean barridos desde el primer cuadrante del eje “m”. Enseguida, se calculan los componentes rectangulares de la(s) fuerza(s) conocida(s) y se evalúa la sumatoria de las columnas de los componentes rectangulares.

Paso 5: Se calcula el valor del componente rectangular que garantizará la obtención de equilibrio y luego la magnitud de la primer incógnita “F1” o “F2”. Por último, en esa misma fila se evalúa el valor del componente restante.

Paso 6: En este paso, se calcula el valor restante del componente rectangular que garantizará el equilibrio, que a su vez será igual al valor de la incógnita “F1” o “F2”, según el caso, puesto que esta fuerza únicamente contará con una componente rectangular.

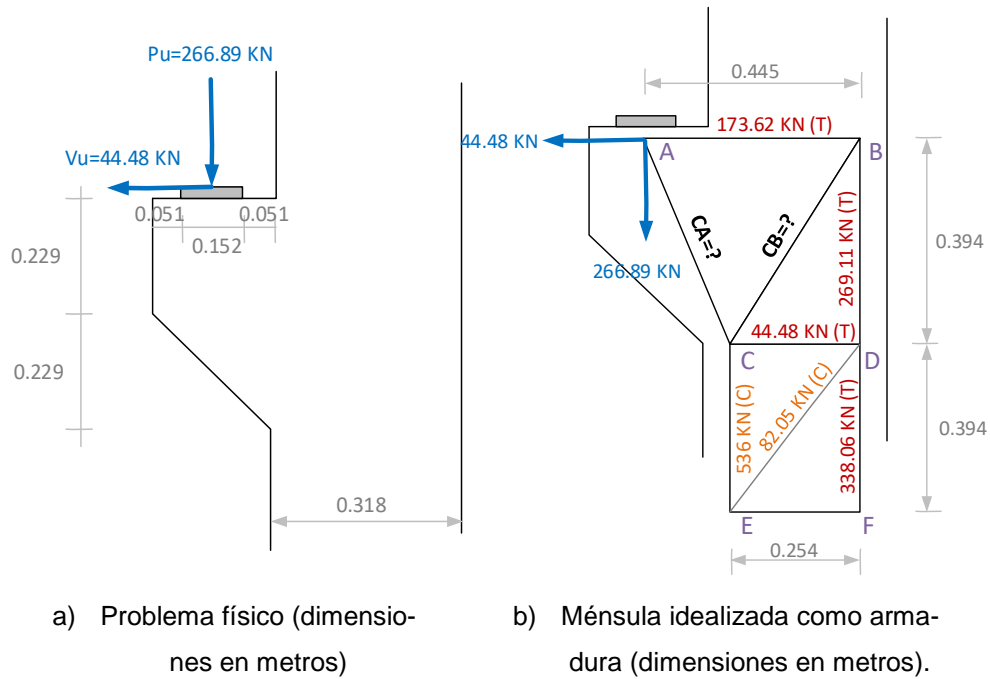
Paso 7: Cuando en las fuerzas “F1” y “F2” sean de valor negativo en su magnitud, esto indica que la fuerza se encuentra en compresión. En la tabla, lo anterior se puede representar por medio del valor absoluto de la fuerza, pero a ello se le debe sumar o restar 180 grados. El criterio respecto a si se debe sumar o restar, dependerá de garantizar que el ángulo sea inferior a 360 grados.

Con el ánimo de clarificar el procedimiento, en la siguiente sección se presenta un ejemplo de aplicación de revisión.

Ejercicio de aplicación

Del análisis estructural de una ménsula se obtuvieron las acciones mayoradas actuantes de: $V_u=44.48$ KN, y $P_u=266.89$ KN. Debido a la imposibilidad de aplicar las metodologías clásicas de análisis y diseño estructural, el diseñador representó el problema a través de la metodología de la biela (Strut and tie model) en concordancia con el Apéndice A de [14]. La Figura 3 presenta la ménsula con las cargas de diseño y su idealización. En este ejemplo se requiere obtener el valor de las fuerzas “CB” y “CA”.

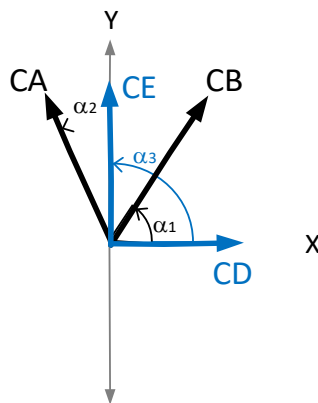
Figura 3. Modelo físico e idealizado de una ménsula de concreto reforzado



A continuación, se presenta la solución del ejercicio de aplicación siguiendo paso a paso la metodología propuesta.

Paso 1: Realización del diagrama de cuerpo libre del nudo, asumiendo que las fuerzas internas desconocidas se encuentran actuando a tensión; es decir, saliendo del nudo. También se dibujaron los ángulos de las fuerzas actuantes desde el primer cuadrante del eje "X". Todo ello se advierte en la Figura 4.

Figura 4. Diagrama de cuerpo libre fuerzas actuando en el nudo C



Ahora, en la Tabla 2 se presentan los datos e incógnitas del problema.

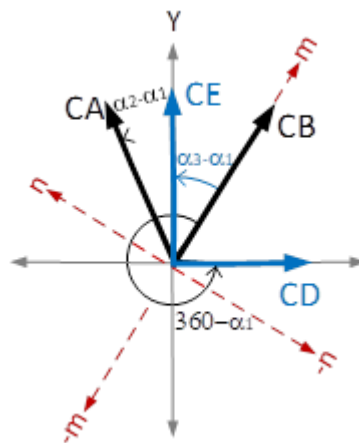
Tabla 2. Datos de entrada e incógnitas del nodo C

Elemento	Ángulo (Grados)	Magnitud (KN)
CD	0	44.48
CE	90	536
CB	57.17	?
CA	11.82	?

Paso 2 (Opcional). Si existen varias fuerzas de magnitud y dirección conocidas, se deben reemplazar por una única fuerza resultante. Siguiendo la nomenclatura usada en la Figura 1, esta fuerza resultante, o única fuerza, es representada a través de la fuerza “F3”. (Para este ejercicio se ignora este paso).

Paso 3: En el caso de que la línea de acción de “F1” o “F2” coincida con el eje “X” o “Y”, se ha de pasar al siguiente punto; en este caso, se infiere que los ejes “X-Y” coinciden con los ejes “m-n”. Pero en caso contrario, es decir, que las fuerzas internas desconocidas “F1” y “F2”, tengan componentes rectangulares sobre los ejes “X-Y”, se debe utilizar una nueva representación paramétrica “m-n”, rotando el sistema de tal forma que un eje, ya sea el “m” o “n”, coincida con la línea de acción de “F1”. La Figura 5 presenta la nueva representación del problema.

Figura 5. Diagrama de cuerpo libre actuando en el nodo C incluyendo la representación paramétrica “m-n” propuesta



Paso 4: Utilizar el formato tabular para ingresar los datos. Los ángulos son barridos desde el primer cuadrante del eje “m”. Los componentes rectangulares de la(s) fuerza(s) conocida(s) son calculados y se evalúa la sumatoria de las columnas de los componentes rectangulares.

Para el presente ejemplo, los ángulos son barridos a partir del primer cuadrante del eje “m”; luego, la tabla de cálculos quedaría de la siguiente forma.

Tabla 3. Datos de entrada con referencia al plano “m-n” del nodo C

F	Magnitud (KN)	Ángulo (grad.)	$F_m = F \cos(\alpha)$ (KN)	$F_n = F \sin(\alpha)$ (KN)
CD	44.48	57.17	24.11	-37.38
CE	536	32.83	450.40	290.58
CB		0		0
CA		58.65		
Σ			$\Sigma=474.51$	$\Sigma=253.20$

Paso 5: Calcular el valor del componente rectangular que garantiza la obtención de equilibrio. A continuación, se calcula la magnitud de la primera incógnita “F1” o “F2” y, finalmente, en esa misma fila, se evalúa el valor del componente restante.

En el problema actual es claro que el sistema está en desequilibrio por -253.20 KN. Conocida esta magnitud, se puede obtener el valor de la fuerza CB y el valor del componente de esta fuerza sobre el eje “m”. Al reemplazar estos valores en la tabla, se tendría:

$$F_{CA} = \frac{-253.20 \text{ KN}}{\sin(58.65)} = -296.49 \text{ KN} \quad (8)$$

$$F_{CA_m} = -296.49 \cos(58.65) = -154.26 \text{ KN} \quad (9)$$

Tabla 4. Actualización de cálculos paso 5

F	Magnitud. (KN)	Angulo (grad.)	$F_m = F \cos(\alpha)$ (KN)	$F_n = F \sin(\alpha)$ (KN)
CD	44.48	57.17	24.11	-37.38
CE	536	32.83	450.40	290.58
CB		0		0
CA	-296.49	58.65	-154.26	-253.20
			$\Sigma=320.26$	$\Sigma=0$

La Tabla 4 indica que ya se ha cumplido el equilibrio de fuerzas en el eje “n” y que se requieren -320.26 KN para alcanzar equilibrio en el eje “m”.

Paso 6: Calcular el valor restante del componente rectangular que garantiza equilibrio. Este a su vez será igual al valor de la incógnita “F1” o “F2”, según el caso, puesto que esta fuerza contará únicamente con un componente rectangular.

De la Tabla 4, intuitivamente se puede afirmar que el componente “m” de la fuerza “CB” es igual a la magnitud de la fuerza “CB”, toda vez que esta fuerza solo tiene componente sobre el eje “m”. La actualización de datos es presentada en la Tabla 5.

Tabla 5. Actualización de cálculos paso 6

F	Magnitud. (KN)	Angulo (grad.)	$F_m = F \cos(\alpha)$ (KN)	$F_n = F \sin(\alpha)$ (KN)
CD	44.48	57.17	24.11	-37.38
CE	536	32.83	450.40	290.58
CB	-320.26	0	-320.26	0
CA	-296.49	58.65	-154.26	-253.20
Σ			$\Sigma=0$	$\Sigma=0$

Paso 7: Si las fuerzas “F1” y “F2” son de carácter negativo en su magnitud, ello indicaría que la fuerza se encuentra en compresión. En la Tabla 6 esto se puede representar por medio del valor absoluto de la fuerza, pero a la orientación se le deben sumar o restar 180 grados.

Del paso anterior, se determinaron las fuerzas CB=-320.26 KN (compresión) y CA=-296.49 KN (compresión). Al expresar su magnitud como positiva, se deben corregir los valores de los ángulos adicionando 180 grados. El resultado final, con todas las magnitudes positivas, se presenta en la Tabla 6.

Tabla 6. Actualización de cálculos paso 7

F	Magnitud (KN)	Ángulo (grad.)	$F_m = F \cos(\alpha)$ (KN)	$F_n = F \sin(\alpha)$ (KN)
CD	44.48	57.17	24.11	-37.38
CE	536	32.83	450.40	290.58
CB	320.26	180	-320.26	0
CA	296.49	238.65	-154.26	-253.20
Σ			$\Sigma=0$	$\Sigma=0$

Una vez determinado el valor de todas las fuerzas en la idealización de la ménsula como armadura, se procede a realizar el diseño del acero de refuerzo requerido, utilizando las recomendaciones del código aplicable; en este caso, el Apéndice A de [14]. Nótese que en el cálculo de las fuerzas internas se presentaron varias tablas, sin embargo, estas solo se usaron para presentar con claridad cada uno de los pasos de la metodología propuesta, pues, en realidad la metodología requiere la utilización de una tabla única.

Verificación usando una solución analítica tradicional

Para verificar el ejercicio anterior se ha decidido usar el método de sustitución. Aplicando condiciones de equilibrio sobre la Figura 4, se tiene:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (10)$$

$$\mathbf{CD} + \mathbf{CB}\cos(\alpha_1) + \mathbf{CA}\cos(\alpha_2) = \mathbf{0} \quad (11)$$

Reorganizando todo, se obtiene:

$$\mathbf{CB}\cos(\alpha_1) + \mathbf{CA}\cos(\alpha_2) = -\mathbf{CD} \quad (12)$$

Ahora despejando "CB" en la ecuación (12), se encuentra:

$$\mathbf{CB} = \frac{-\mathbf{CD} - \mathbf{CA}\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)} \quad (13)$$

El siguiente paso es evaluar el equilibrio en el eje "Y".

$$\sum \mathbf{F}_y = \mathbf{0} \quad (14)$$

$$\mathbf{CE} + \mathbf{CB}\sin(\alpha_1) + \mathbf{CA}\sin(\alpha_2) = \mathbf{0} \quad (15)$$

Reorganizando de nuevo, se tiene:

$$\mathbf{CB}\sin(\alpha_1) + \mathbf{CA}\sin(\alpha_2) = -\mathbf{CE} \quad (16)$$

Ahora, reemplazando la ecuación (13) en la ecuación (16) se determina:

$$\left(\frac{-\mathbf{CD} - \mathbf{CA}\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)} \right) \sin(\alpha_1) + \mathbf{CA}\sin(\alpha_2) = -\mathbf{CE} \quad (17)$$

$$\frac{-\mathbf{CD}\sin(\alpha_1) - \mathbf{CA}\cos(\alpha_2)\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} + \mathbf{CA}\sin(\alpha_2) = -\mathbf{CE} \quad (18)$$

$$\frac{-\mathbf{CA}\cos(\alpha_2)\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} + \mathbf{CA}\sin(\alpha_2) = -\mathbf{CE} + \frac{\mathbf{CD}\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} \quad (19)$$

Reorganizando y factorizando "CA", se tiene:

$$\mathbf{CA} \left(\sin(\alpha_2) - \frac{\cos(\alpha_2)\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} \right) = -\mathbf{CE} + \frac{\mathbf{CD}\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} \quad (20)$$

Simplificando,

$$CA(\sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_2)\tan(\alpha_1)) = -CE + CD\tan(\alpha_1) \quad (21)$$

Finalmente:

$$CA = \frac{CD\tan(\alpha_1) - CE}{(\sin(\alpha_2) - \cos(\alpha_2)\tan(\alpha_1))} \quad (22)$$

Ahora se usan las ecuaciones (22) y (13) para resolver las incógnitas del problema de la ménsula propuesto. Luego:

$$CA = \frac{(44.48 \text{ KN})\tan(57.17) - (536 \text{ KN})}{(\sin(115.82) - \cos(115.82)\tan(57.17))} \cong -296.5 \text{ KN} \quad (23)$$

$$CB = \frac{-44.48 \text{ KN} - (536 \text{ KN})\cos(115.82)}{\cos(57.17)} \cong -320.25 \text{ KN} \quad (24)$$

A manera de complemento, se verifica la solución usando las ecuaciones (6) y (7). Se tiene entonces que la magnitud y dirección de la fuerza resultante que reemplazaría a las fuerzas CD y CE, es decir, la 'F3' en términos de la metodología planteada, es igual a:

$$F_3 = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \sqrt{44.48^2 + 536^2} = 537.84 \text{ KN} \quad (25)$$

Y el ángulo de la resultante será igual a α_3 :

$$\alpha_3 = \text{atan}\left(\frac{536 \text{ KN}}{44.48 \text{ KN}}\right) = 85.26 \quad (26)$$

$$CB = 537.84 \frac{\sin(115.82 - 85.26)}{\sin(57.17 - 115.82)} \cong -320.26 \text{ KN} \quad (27)$$

$$CA = -(537.84) \frac{\sin(85.26 - 57.17)}{\sin(115.82 - 57.17)} \cong -296.49 \quad (28)$$

Por último, resulta evidente que las ecuaciones (6) y (7), al igual que las ecuaciones (13) y (22), carecen de significado físico, son de difícil recordación, resultan prácticas de ser aplicadas a casos similares y tienden a elevar la posibilidad de error en su transcripción o aplicación. En contraste, la metodología propuesta requiere menos cálculos, es más sencilla en su aplicación y en su objeto (garantizar equilibrio), y provee una solución complementaria a las soluciones analíticas tradicionales.

Conclusión

El método rotacional provee una metodología alterna para realizar el análisis estructural de armaduras estáticamente determinadas. Este simplifica la representación analítica del problema debido a la rotación del plano tradicional cartesiano "X-Y" hasta tener una nueva representación paramétrica "m-n" coincidente con la línea de acción de una de las fuerzas desconocidas. Al expresarse el problema de forma tabular, se explota la condición de equilibrio, puesto que permite calcular de forma directa el desbalance para cumplir esta condición, ya sea sobre el eje "m" o "n", así como obtener el valor de la magnitud de las incógnitas de una forma sencilla, práctica y confiable. Se evidenció que la metodología propuesta requiere significativamente menos tiempo y cálculos manuales, en comparación con la solución algebraica tradicional del sistema lineal de ecuaciones (igualación, sustitución, matrices).

Es claro, en fin, que la metodología propuesta incorpora conceptos prácticos que facilitan y simplifican la solución analítica de armaduras. El Método Rotacional puede ser usado como método complementario en la enseñanza de las metodologías tradicionales usadas en el análisis estructural de armaduras.

Referencias bibliográficas

1. W. McGuire, R.G. Gallagher, and R. Ziemian, *Matrix Structural Analysis*, John Wiley and Sons, 2nd Edition. New York, 2005.
2. W. Ritter, "Die bauweise hennebique", *Schweizerische Bauzeitung*, vol. 33, no. 7, pp. 59-61, 1899.
3. M. O. Withey, *Tests of plain and reinforced concrete series of 1906*, *Bull. Univ. of Wis. Engineering Series*, vol. 4, no. 1, pp. 1-66., 1907.
4. E. Morsch, *Reinforced concrete construction - Theory and application*, 5th Ed., Wittwer, Stuttgart, Vol. 1, Part 1, 1920.
5. A. Hrennikoff, "Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 8, pp. 169-175, 1941.

6. J. Vallenias, V. Bertero, and E. Popov, "Hysteretic Behavior of Reinforced Concrete Structural Walls", *NASA STI/Recon Technical Report N*, vol. 80, 1979.
7. H. Hiraishi, *Evaluation of Shear and Flexural Deformations of Flexural Type Shear Wall*, In Proc. Of 8th WCEE, Vol. 5, 1984.
8. N. H. T. To, J. M. Ingham, and S. Sritharan, *Monotonic nonlinear strut-and-tie computer models*, *New Zealand Nat. Soc. Earthquake Eng. Bull*, Vol. 34, pp. 169–190, 2001.
9. N. H. T. To, J. M. Ingham, and S. Sritharan, "Cyclic strut-and-tie modeling of reinforced concrete structures", *Pacific Conf. on Earthquake Engineering*, Paper No. 102, Christchurch, New Zealand, 2003.
10. H. Park and T. Eom, "Truss Model for Nonlinear Analysis of RC Members Subject to Cyclic Loading", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 133, pp. 1351-1363, 2007.
11. M. Panagiotou, J. I. Restrepo, M. Schoettler, and G. Kim, "Nonlinear Cyclic Truss Model for Reinforced Concrete Walls", *ACI Structural Journal*, Vol. 109, pp. 205-214, 2012.
12. Y. Lu and M. Panagiotou, "Three-Dimensional Cyclic Beam-Truss Model for Nonplanar Reinforced Concrete Walls", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 140, p. 4013071, 2014.
13. M. Moharrami, I. Koutromanos, M. Panagiotou, and S. C. Girgin, "Analysis of shear-dominated RC columns using the nonlinear truss analogy", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 44, pp. 677-694, 2015.
14. ACI-318-11, "Building Code Requirements for Structural Concrete", *Farmington Hills, Michigan, American Concrete Institute*, 2011.