

# Interpretaciones de la fracción en una experiencia de simulación con GeoGebra\*

Jhorfy J. Reyes R.<sup>1</sup>, Juan Luis Prieto<sup>2</sup>  
Universidad del Zulia, Venezuela

DOI: <http://dx.doi.org/10.17081/eduhum.18.30.1321>

Recibido: 27 de febrero de 2015

Aceptado: 16 de junio de 2015

## Interpretations of the fraction in a simulation experience with GeoGebra

### Palabras clave:

Fracciones, GeoGebra, Interpretaciones de la fracción, Simuladores.

### Resumen

En este trabajo se presenta una experiencia de simulación con GeoGebra vivida por dos estudiantes de nivel medio en Venezuela. Específicamente, se describe la manera en que las estudiantes resuelven la tarea de representar un fenómeno con el software. Durante la simulación, las interpretaciones parte-todo, así como reparto y operador de las fracciones, ayudaron a crear y validar técnicas de localización de puntos característicos de las figuras geométricas asociadas con el fenómeno tratado. La conexión entre las distintas interpretaciones y con otras nociones matemáticas emergentes también se puso de manifiesto. En cuanto al GeoGebra, se resalta el uso de la cuadrícula como referente gráfico que apoyó las reflexiones de las estudiantes a lo largo de la experiencia.

### Key words:

Fractions, Fraction interpretations, GeoGebra, Simulations.

### Abstract

This paper presents a simulation experience with GeoGebra lived by two average level high school students from Venezuela. Specifically, it describes the way in which students solve the task of representing a phenomenon with the software. During the simulation, the interpretations of being part of a whole, as well as distribution and fractions operator, took place and helped students to create and validate techniques to locate characteristic points of the geometrical figures associated with the phenomenon treated. The connection between the different interpretations and other mathematical concepts were also present. Regarding to GeoGebra, it is highlighted the use of the grid as a graphic reference that supported the reflections of the students during the experience.



**Referencia de este artículo (APA):** Reyes, J. & Prieto, J. L. (2016). Interpretaciones de la fracción en una experiencia de simulación con GeoGebra. En *Revista Educación y Humanismo*, 18(30), 42-56. <http://dx.doi.org/10.17081/eduhum.18.30.1321>

\* Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación No. CH-0510-15, adscrito al Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) y financiado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CONDES) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

1. Licenciado en Educación, mención Matemáticas y Física por la Universidad del Zulia y actualmente labora como profesor voluntario en el Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. Email: [jhorfy.reyes@aprenderenred.com.ve](mailto:jhorfy.reyes@aprenderenred.com.ve)
2. Licenciado en Educación, mención Matemáticas y Física por la Universidad del Zulia y Master en Nuevas Tecnologías Aplicadas a la Educación por la Universidad de Alicante, España. Actualmente es profesor de la Universidad del Zulia. Email: [juanl.prietog@gmail.com](mailto:juanl.prietog@gmail.com)

## Introducción

La actividad matemática en la que se ven involucrados los estudiantes en sus clases es el reflejo de su interacción en tres situaciones: unas *tareas* –problemas y ejercicios– que el profesor les propone, un cierto conocimiento matemático y su entorno social. Durante esta actividad, los estudiantes elaboran y reproducen un conjunto de *técnicas* –procedimientos y estrategias de resolución de las tareas mediadas por herramientas o artefactos diversos– y *discursos* que la explican y justifican. Estos discursos develan el lugar que ocupa el conocimiento matemático durante la actividad (Chevallard, 1999, pp.222-225).

Ahora bien, dada la importancia que la actividad matemática reviste para el aprendizaje, es imperativo que esta se lleve a cabo de una manera adecuada a las exigencias del momento, lo que hace a la reflexión sobre las relaciones entre el conocimiento matemático y las acciones de los estudiantes al resolver las tareas, un elemento fundamental de la práctica del profesor.

Sin embargo, en las instituciones escolares, la actividad matemática no siempre se lleva a cabo de la manera más conveniente para el logro de los aprendizajes, y esto afecta muchas veces el desempeño y actitud de los estudiantes. Por esta razón, los más jóvenes suelen sentir apatía hacia el estudio de la matemática y pierden fácilmente el interés en la elaboración de discursos que relacionen sus acciones en el área con el saber matemático subyacente (Crespo, 2009; Reyes-Gasperini, 2010, p.45).

Esta situación plantea el desafío de transformar la actividad matemática que predomina en las escuelas actualmente, mediante actividades cuyas dinámicas ayuden al profesor a pensar y actuar sobre la base de este tipo de relaciones.

Hoy en día, la necesidad de estas dinámicas puede verse favorecida por la integración de las tecnologías digitales en la actividad matemática del aula (Laborde, 2001; Strässer, 2002, p.65), ya que estas tecnologías ofrecen al profesor la oportunidad de establecer nuevas relaciones entre la actividad matemática y el aprendizaje de los contenidos curriculares (Laborde, 1998, p.3), en especial de aquellos cuya comprensión puede resultar frustrante para muchos estudiantes. En particular, lo anterior ocurre con el concepto de fracción y sus múltiples interpretaciones (van Galen, Feijs, Figueredo, Gravemeijer, van Herpen & Keijzer, 2008, p.11). Al respecto, una de las tecnologías que puede influir favorablemente es el GeoGebra, un software libre de matemática dinámica que hace posible la realización de actividades relacionadas de forma directa o indirecta con el conocimiento matemático escolar (Hohenwarter & Preiner, 2007). Más concretamente, la experiencia del Grupo TEM en el uso del GeoGebra con estudiantes y profesores lleva a valorar la simulación como una actividad propicia para el estudio de la matemática en relación con contextos reales interesantes (Cervantes, Rubio & Prieto, 2015, p.19).

Un simulador es un modelo computacional de una situación real o hipotética, o bien de un

fenómeno natural, que facilita la observación, exploración y manipulación de las diferentes variables involucradas en la situación o fenómeno (Clark, Nelson, Sengupta & D'Angelo, 2009; Hilton & Honey, 2011; Pugnali, 2008, p.27). Desde esta perspectiva, elaborar un simulador con GeoGebra implica recrear una situación o fenómeno real a partir de procesos de construcción geométrica con el software, que se realizan de forma progresiva y atendiendo a los diferentes componentes de la situación o fenómeno simulado. Vale aclarar que cada producto de una construcción geométrica es un modelo concreto de algún aspecto del fenómeno que se obtiene al evocar, de forma consciente o inconsciente, uno o varios objetos matemáticos –llamados también *modelos matemáticos*– que se muestran mediante signos, símbolos, expresiones, figuras y otras formas de discurso.

Todo indica que los estudiantes evocan la matemática implícita en la elaboración de un simulador con GeoGebra cuando tratan de justificar el uso que hacen de determinadas herramientas del software para modelar cada aspecto del fenómeno (Gutiérrez & Prieto, 2015, p.116). Y, aunque esto puede parecer simple, la omisión de estas justificaciones durante la simulación hace que la matemática en sí pase desapercibida durante gran parte del proceso y, en consecuencia, que los estudiantes solo aprendan técnicas no justificadas en la teoría matemática.

En un esfuerzo por reconocer el lugar que ocupa la matemática en las experiencias de si-

mulación con GeoGebra, en este trabajo se describe el proceso de construcción de un elemento que compone la estructura de una grúa mecánica con la ayuda del software, centrando la atención en las tareas y técnicas que fueron atendidas. El relato da cuenta de la emergencia de la noción de fracción y dos de sus interpretaciones mientras se aborda una de las tareas de construcción.

### *Noción de fracción y sus interpretaciones*

En general, la palabra *fracción* alude a un par ordenado de números naturales que se escribe de la forma  $\frac{a}{b}$  y es usado en múltiples situaciones y contextos (Llinares & Sánchez, 1997). Dos cosas destacan de este tipo de números. Por un lado, la fracción hace referencia a algún tipo de *totalidad* que puede ser discreta o continua (Ríos, 2008, pp.145-157). Una *totalidad discreta* alude a un conjunto de elementos de la misma naturaleza, mientras que la *totalidad continua* se relaciona con una representación gráfica –por ejemplo, el conocido *modelo de área*– o con una cantidad de magnitud. Por otro lado, el uso de las fracciones pone de relieve una serie de *interpretaciones* que se atribuyen a este objeto y varían según la situación o contexto de aplicación. Para Ríos (2008; 2010), algunas de estas interpretaciones son: parte-todo, cociente, reparto, división, razón y operador. En este sentido, el aprendizaje de las fracciones se vincula con el uso adecuado de estas interpretaciones en situaciones de resolución de tareas matemáticas. De modo que, durante la enseñanza, es conveniente que el docente haga explícita las relaciones entre las diferentes interpretaciones de la fracción.

En la literatura especializada se cuenta con una variedad de tareas de fracciones que hacen énfasis en cada una de las interpretaciones mencionadas (Andonegui, 2006, p.16). Sin embargo, en ocasiones conviene develar tales interpretaciones a partir del análisis de las técnicas y discursos de los estudiantes, especialmente cuando emergen de actividades matemáticas no convencionales, como es el caso de la simulación. En este trabajo interesan tres interpretaciones de la fracción: *parte-todo*, *reparto* y *operador*, las cuales se han puesto de manifiesto en los discursos alrededor de la simulación de la grúa torre.

La interpretación *parte-todo* de la fracción concierne al reconocimiento de la relación existente entre un número de partes congruentes –equivalentes entre sí como cantidad de superficie o de objetos– y el número total de partes (Llinares & Sánchez, 1997). Por ejemplo, las siguientes oraciones ponen de manifiesto un uso de la fracción  $\frac{2}{3}$  desde esta interpretación: (i) *dos de las tres partes iguales que componen a una barra de chocolate*, (ii) *dos intentos fallidos de un total de tres intentos* o (iii) *dos de cada tres hombres de un grupo con una cualidad especial para el trabajo*.

El *reparto* como interpretación de la fracción comprende situaciones de repartición de una totalidad en partes iguales (Andonegui, 2006, p.10). Por ejemplo, en una situación de reparto, la fracción  $\frac{2}{3}$  puede ser interpretada como que “cada niño de un grupo de tres niños ha comido la tercera parte de dos pizzas”.

Por último, la fracción como *operador* sugiere dos formas distintas de interpretación en función del contexto: como factor de cambio o como función (Ríos, 2008; 2010). En la primera forma de interpretación, la fracción-operador actúa como un *factor de cambio* que se aplica a una totalidad mediante una sucesión de operaciones de multiplicación y división, efectuadas en cualquier orden (Llinares y Sánchez, 1997; Ríos, 2010). Aunque el resultado es el mismo en cualquier orden, el significado de estas varía según como se apliquen las operaciones. Por ejemplo, en la expresión “ $\frac{2}{3}$  de una longitud  $a$ ”, la fracción  $\frac{2}{3}$  indica el factor de cambio que actúa sobre la totalidad –la longitud. Otra forma de escribir la expresión es:  $\frac{2}{3} a$  y su resultado puede obtenerse de dos maneras:

- La totalidad es dividida entre 3 y el resultado luego es multiplicado por 2. Esto es:  $\frac{2}{3} a = (a \div 3) \cdot 2$ . En este caso, la interpretación de la fracción como *operador* se ve influenciada por el significado *parte-todo*.
- La totalidad es multiplicada por 2 y el resultado obtenido se divide entre 3. Esto es:  $\frac{2}{3} a = (a \cdot 2) \div 3$ . Aquí la interpretación *operador* de la fracción está influenciada por el significado de *reparto*.

En la segunda forma de interpretar la fracción como operador, interviene la noción de función real de variable real. En este caso, la función transforma una totalidad  $x$  según la regla  $\frac{a}{b} \cdot x$ . En otras palabras, el sujeto puede pensar en la transformación de  $x$  a partir de  $\frac{a}{b}$  en términos de la función lineal:  $f(x) = \frac{a}{b} \cdot x$ . Esta forma de

interpretación puede servir para resolver una situación como la siguiente: “determinar los  $\frac{2}{3}$  de 15000 bolívares”. Es así como  $f(15000) = \frac{2}{3} \cdot (15000)$  resuelve la situación siempre que se apliquen las operaciones del caso. A pesar de que esta forma de interpretación no es común en las clases de matemática, es muy útil para comprender la manera de proceder ante situaciones como esta: “la sexta parte de las dos terceras partes de 900 metros”. La proposición anterior puede resumirse así:  $\frac{1}{6} \left( \frac{2}{3} \cdot 900 \right)$  metros. Su resolución se apoya claramente en la noción de fracción como operador desde una perspectiva funcional. Más aún, la situación alude a una composición de dos funciones lineales,  $g(x) = \frac{1}{6} \cdot x$  y  $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x$ , definida como  $(g \circ f)(x)$ . Es así como  $(g \circ f)(x) = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot x \right)$ , aplicada al valor, permite hallar una respuesta a la situación. Veamos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(900) &= \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 900 \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot (900 \div 3)) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 300) = \frac{1}{6} \cdot 600 \\ &= 1 \cdot (600 \div 6) = 1 \cdot 100 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Es evidente que la fórmula de  $(g \circ f)(x)$  puede simplificarse más aún, siempre que se considere la definición y propiedades de la multiplicación en  $\mathbb{R}$ :

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot x \right) = \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot x$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= \frac{1}{9} \cdot x \\ (g \circ f)(900) &= \frac{1}{9} \cdot 900 = 1 \cdot (900 \div 9) \\ &= 1 \cdot 100 = 100 \end{aligned}$$

En líneas generales, la técnica detrás de esta forma de proceder puede resumirse así:

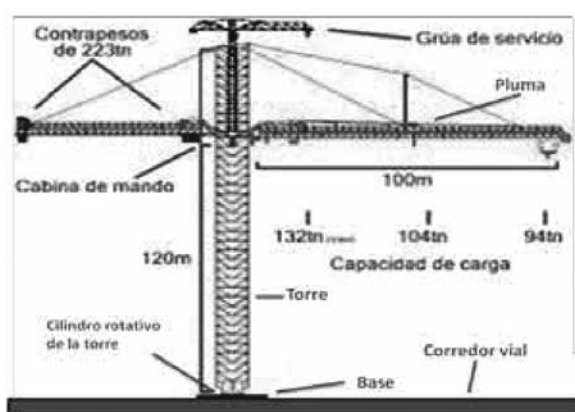
$$\frac{a}{b} \cdot \left( \frac{c}{d} \cdot x \right) = \left( \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) \cdot x = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \cdot x$$

### ***El contexto de la simulación***

La experiencia de simulación que sirve de marco a este trabajo forma parte de un proyecto socio-educativo que el Grupo TEM puso en funcionamiento en la *Unidad Educativa Nacional Alejandro Fuenmayor*, ubicada en la ciudad de Maracaibo, Venezuela. El proyecto, denominado *Club GeoGebra para la Diversidad*, tiene el propósito de contribuir al desarrollo de las competencias científicas de los estudiantes que participan en los clubes, mediante actividades de simulación de fenómenos naturales con la ayuda del GeoGebra. La simulación que se comenta en este trabajo estuvo a cargo de dos estudiantes del último curso de Educación Media en la institución antes citada (Reyes, Sierra & Reyes, 2015, pp.36-46), quienes participaron de forma libre y voluntaria en sesiones de trabajo semanales, realizadas durante el año escolar 2014-2015. Los estudiantes contaron con el apoyo del primer autor de este trabajo, quien tomaba parte en las sesiones de trabajo en calidad de promotor de este Club GeoGebra.

El fenómeno simulado por las estudiantes fue el funcionamiento de una grúa mecánica de tipo torre. Esta estructura metálica desmontable es usada comúnmente para transportar carga pesada en los puertos marítimos o en la construcción de grandes edificaciones. La grúa en cuestión corresponde al modelo K-10000 de origen danés, patrocinada por la empresa *Kroll Cranes* y compuesta por la *torre principal*, el *brazo mecánico* con tres grupos de contrapeso de 223 toneladas, la *pluma* en la que se encuentra el carril donde se desplaza o traslada el gancho de aprehensión y la *grúa de servicio* que se utiliza para el montaje de la grúa principal y como apoyo para el levantamiento de carga especial.

Entre las características de esta grúa resaltan sus 120 metros de altura, lo que la hace ser la estructura más alta de este tipo en el mundo. Además, esta grúa soporta vientos de hasta 240 km/h y levanta hasta 132 toneladas, incluso, a 100 metros de distancia, la torre es capaz de soportar unas 92 toneladas de peso (ver Figura 1).



**Figura 1. Vista lateral de una grúa torre**

Fuente: Imagen extraída de: <http://ingenieriaycomputacion.blogspot.com/2013/02/kroll-k-10000-la-grua-torre-mas-grande.html>

El funcionamiento de la grúa torre está determinado por el movimiento del gancho de aprehensión sobre el carril y alrededor de la base, a través del giro del brazo mecánico hasta en 360°. Este giro define una región de carga circular localizada en la base de la grúa y que cuenta con un radio máximo de 100 metros. Cuando la grúa es usada en puertos y aeropuertos, a esta región se le conoce como el *corredor vial*, por ser la zona de carga y descarga de los contenedores y la superficie por donde se mueven los vehículos que los trasladan. Para la construcción del corredor vial con el GeoGebra, se asume una perspectiva lineal, paralela o frontal de la grúa, en la cual el dibujo representado intenta mostrar cierta profundidad, dotándolo de una naturaleza tridimensional ficticia.

### ***El proceso de simulación***

Para simular con GeoGebra el funcionamiento de la grúa torre, fue necesario resolver una serie de tareas de construcción que se atendieron de forma progresiva. En este trabajo centramos la atención únicamente en la tarea de construcción del corredor vial, desde la perspectiva que ofrece la imagen de referencia. Después de establecer las condiciones de la simulación en el software, las estudiantes emprendieron la construcción de esta parte de la grúa en dos etapas. En la primera etapa, el corredor vial se relaciona con algunos objetos geométricos que hacen posible su representación en la interfaz del GeoGebra. La segunda etapa consistió en la construcción en sí del modelo geométrico representativo del corredor vial. Fue precisamente en esta etapa cuando las

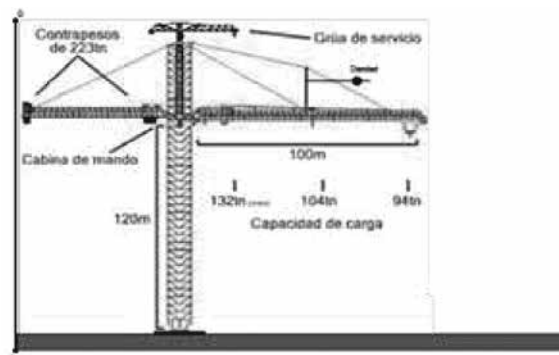
representaciones *parte-todo*, *reparto* y *operador* de la fracción se presentaron en la lógica del trabajo de simulación. A continuación, se explica con más detalles cada una de estas etapas.

### Consideraciones de inicio

Antes de iniciar con la simulación, fue necesario que las estudiantes crearan unas condiciones de partida. Estas condiciones fueron las siguientes:

- La imagen mostrada en la Figura 1 fue insertada en la *Vista Gráfica* del GeoGebra para contar con una referencia al momento de la construcción de las partes de la grúa, incluyendo el corredor vial. La apariencia de la interfaz seleccionada fue la de *Álgebra*, la cual muestra al usuario un sistema de coordenadas cartesianas. La imagen fue anclada a los ejes coordenados luego de construir los puntos  $A$  y  $B$ , localizados en el origen del sistema y en la rama positiva del eje  $y$ , respectivamente. Luego de contar con  $A$  y  $B$ , se hicieron corresponder estos puntos con las esquinas inferior y superior izquierda de la figura.
- La *opacidad* de la imagen –esto es, la variación de su tonalidad– fue controlada por medio de un deslizador llamado *claridad*, creado para revisar el estatus de la construcción.
- Se construyó el segmento  $\overline{AB}$  sobre la imagen con el propósito de que sirviera de *patrón de medida*, esto es, de referente al momento de construir figuras con longitudes o distancias, de manera que estas medidas se hagan depender de la longitud de  $\overline{AB}$ . Vale destacar que  $\overline{AB}$  fue construido de manera que su longitud

se correspondiera con la altura de la grúa desde la parte inferior del corredor vial. De forma predeterminada, el GeoGebra usó el rótulo para señalarla longitud  $AB$  (ver Figura 2).



**Figura 2. Condiciones de la simulación mostradas en la imagen**

Fuente: Elaboración de los autores

### *Etapas 1. Vinculación del corredor vial con objetos geométricos*

La construcción del corredor vial partió de la siguiente pregunta: ¿qué objeto u objetos geométricos permiten representar esta parte de la grúa con el GeoGebra? Dada la perspectiva frontal de la imagen de referencia, el corredor vial adquiriría para las estudiantes una forma geométrica muy particular: la de un *rectángulo*; que, según ellas, era el modelo matemático que mejor representa esta parte del fenómeno. La elección del rectángulo como modelo asociado al corredor vial se hizo a partir del reconocimiento de relaciones de paralelismo y congruencia entre los bordes del corredor vial en la imagen de fondo, así como de los ángulos rectos en cada esquina. A medida que se avanzó en la simulación, fueron surgiendo algunos otros elementos matemáticos asociados con el rectángulo.

### ***Etapas 2. Construcción del corredor vial***

Hasta este momento, las estudiantes solo contaban con uno de los vértices del rectángulo, el punto, que además es el extremo inferior del segmento patrón. Este análisis permitió comprender que la representación del rectángulo con GeoGebra dependía de la siguiente tarea:

*Determinar la posición de los demás vértices del rectángulo.*

A continuación, se explica la secuencia de pasos seguidos para responder a esta tarea

#### *Localización del vértice superior izquierdo*

En la imagen, se podía observar que el vértice superior izquierdo estaba contenido en el segmento patrón, a cierta *distancia* del vértice. Aunque esta distancia era desconocida para las estudiantes, ellas llegaron al acuerdo de aplicar la siguiente técnica para localizar este vértice:

*Construir una circunferencia centrada en y con un radio igual a la distancia desconocida, de manera que la intersección entre esta curva y el patrón de medida defina la localización del vértice.*

En este momento, la localización del vértice superior izquierdo dependía de la determinación de un valor para el radio de la circunferencia, que en sí comprendía una distancia desconocida. Para estimar este valor, las estudiantes apoyaron su análisis en dos cuestiones: (i) la opción *Cua-*

*drícula\** del GeoGebra y (ii) su conocimiento de las fracciones. En otras palabras, dado que el segmento patrón abarcaba lados de una unidad de la cuadrícula (ver Figura 3), las estudiantes idearon una forma práctica de estimar las medidas de distancia o longitud de la construcción a través del uso de la noción de fracción como parte-todo, reparto y operador.



**Figura 3. Segmento patrón y cuadrícula**

Fuente: Elaboración de los autores

En su primer intento por estimar el valor del radio, las chicas centraron la atención en la zona donde estaría ubicado el vértice superior izquierdo en la imagen, concluyendo que este punto se ubicaba, más o menos, en *la mitad* del lado de una unidad de cuadrícula sobre el segmento *a*, específicamente en la más próxima al vértice. En este momento la fracción  $\frac{1}{2}$  pudo ser interpretada como parte-todo u operador, según la totalidad

\* La cuadrícula es una propiedad de la vista gráfica que divide la zona de trabajo en cuadrados del mismo tamaño.



considerada. De modo que si la totalidad es un lado de una unidad de cuadrícula, entonces  $\frac{1}{2}$  significa una de las dos mitades de la totalidad más próxima a  $A$ , es decir, de aquella que cubría el borde izquierdo del corredor vial en la imagen –interpretación parte-todo. En cambio, si la totalidad es el segmento  $a$ , la fracción  $\frac{1}{2}$  representa un factor de cambio que transforma una porción de  $a$ , la cual a su vez es  $\frac{1}{9}$  de tal segmento.

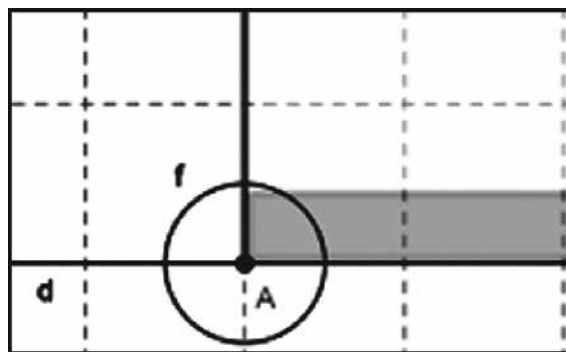
Esta última reflexión se puso de manifiesto en el momento en que las estudiantes establecían la siguiente expresión algebraica como una conclusión de sus discusiones con el promotor:

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{9} \cdot a \right) = \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \right) \cdot a = \frac{1}{18} \cdot a$$

Esta expresión evidencia cómo las chicas usaron de forma inconsciente la noción de fracción como operador desde un enfoque funcional. La composición de funciones lineales les permitió determinar el radio de la circunferencia en este intento. Con este resultado, se construyó la circunferencia  $f$  centrada en  $A$  y de radio  $\frac{1}{18} \cdot a$ . Sin embargo, la circunferencia  $f$  no era la esperada, ya que el punto de corte entre el segmento patrón y la curva definía un punto localizado por encima de la posición que debía ocupar el vértice (ver Figura 4).

Tras este intento fallido, las estudiantes fueron capaces de valorar la localización de los vértices del rectángulo como un proceso difícil pero interesante. En un segundo intento, era evidente que se necesitaba construir una circunferencia

con un radio menor que la dieciochoava parte de la medida patrón. Para ello, se apoyaron en el acercamiento a la zona de trabajo con la esperanza de obtener una mejor visión del lugar ocupado por el vértice superior izquierdo. Vale destacar que la opción de acercamiento del software produce la subdivisión de cada una de las unidades de la cuadrícula en partes iguales.



**Figura 4. Resultado fallido de localización del vértice superior izquierdo**

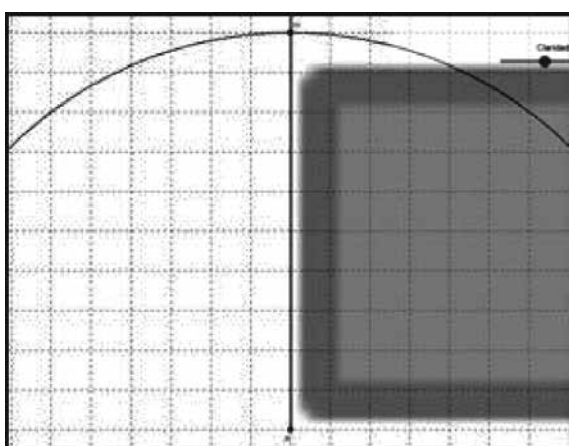
Fuente: Elaboración de los autores

En este sentido, se hicieron varios acercamientos para lograr una mejor apreciación de la zona, justo en el punto de corte de la circunferencia  $f$  y el segmento patrón, lo que facilitaría una nueva estimación del radio. Cuando el acercamiento permitió que cada mitad de un lado de unidad de cuadrícula quedara dividida en 10 partes iguales, las estudiantes observaron que el borde izquierdo del corredor vial ocupaba 9 de las 10 décimas partes de mitad (ver Figura 5).

A sabiendas de que cada mitad del lado de unidad de cuadrícula es la dieciochoava parte de la medida patrón, esto es  $\frac{1}{18} \cdot a$ , entonces el radio que se necesitaba en este intento era de:  $\frac{9}{10}$  de  $\frac{1}{18} \cdot a$ , que resumido sería:  $\frac{9}{10} \cdot \left( \frac{1}{18} \cdot a \right)$ . Para

resolverla, esta expresión fue interpretada como una composición de funciones lineales originadas del significado de fracción como operador, que fue atendida mediante los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{9}{10} \cdot \left( \frac{1}{18} \cdot a \right) &= \left( \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{18} \right) \cdot a = \left( \frac{9 \cdot 1}{10 \cdot 18} \right) \cdot a \\ &= \frac{9 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 2} \cdot a = \frac{9 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 2} \cdot a \\ &= \frac{1}{10 \cdot 2} \cdot a = \frac{1}{20} \cdot a \end{aligned}$$



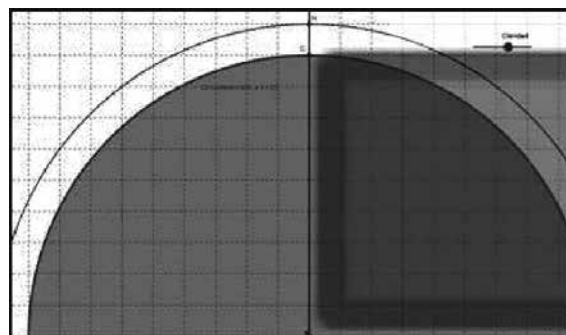
**Figura 5. Acercamiento a la zona de trabajo**  
Fuente: Elaboración de los autores

Usando esta medida de  $\frac{1}{20} \cdot a$  como valor del radio, se procedió a construir la circunferencia  $c$  que se muestra en la Figura 6. El vértice superior izquierdo, llamado  $C$ , se obtuvo al intersecar el segmento patrón con esta circunferencia.

*Localización del vértice inferior derecho*

En cuanto a los restantes vértices, las estudiantes observaron que estos se encontraban en rectas perpendiculares al segmento  $a$  por los vértices  $A$  y  $C$ , ya que todos los ángulos internos del rectángulo son rectos. Es así como emerge otra

idea geométrica –vinculada al rectángulo– que les permitía avanzar en la resolución de la tarea: *relaciones de posición entre rectas*. Entre las relaciones posibles entre dos rectas en el plano, el paralelismo y la perpendicularidad se consideran las más comunes.

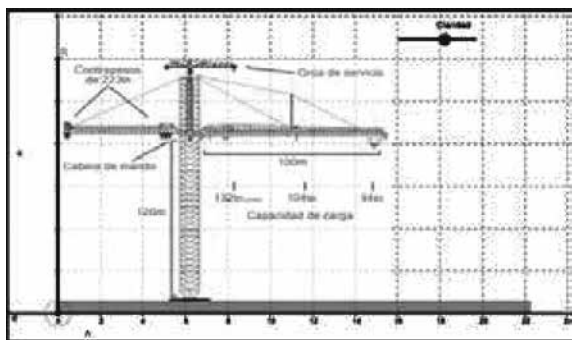


**Figura 6. Posición del vértice superior izquierdo**  
Fuente: Elaboración de los autores

Para el caso del vértice inferior derecho, las estudiantes construyeron la recta perpendicular al segmento  $a$  por el vértice  $A$ , rotulada con la letra  $d$  y, para localizarlo, aplicaron la misma técnica de localización de puntos que fue usada en el paso anterior. Sin embargo, antes de aplicar la técnica se tomó la decisión de ajustar la imagen mediante un alejamiento, de manera que el segmento patrón  $a$  abarcara solo 6 lados de una unidad de cuadrícula y no 9 como antes. En este caso, por ende, cada lado de una unidad de cuadrícula tenía una medida de  $\frac{1}{6} \cdot a$  (ver Figura 7). Esta reflexión facilitó la apreciación de la cantidad de unidades de cuadrículas que distaban entre  $A$  y el lugar ocupado por el vértice inferior derecho en la imagen, originándose así el valor del radio estimado.

Luego de aplicar la técnica fallidamente en

varias ocasiones, las estudiantes lograron determinar un valor apropiado para el radio de la circunferencia, que facilitó la localización del vértice inferior derecho. Este valor se dedujo de un razonamiento basado en la identificación de la cantidad de lados de una unidad de cuadrícula que abarca el borde inferior del corredor vial, el cual era de 11 unidades y un poco más. En este momento era necesario determinar la fracción del lado de una cuadrícula que correspondía a ese trozo de corredor vial sobresaliente.



**Figura 7. Resultado del alejamiento de la imagen**  
Fuente: Elaboración de los autores

Para determinar esta fracción, las chicas usaron la opción de acercamiento del software con el fin de dividir cada lado de una unidad de cuadrícula en tantas partes iguales como fueran necesarias, hasta lograr que la porción sobrante en la Figura 7 cubriera una cantidad exacta de estas nuevas partes. El número de divisiones del lado de cuadrícula fue de 8, por lo tanto, la fracción  $\frac{1}{8}$  representaba a la porción del corredor vial sobresaliente. Esta reflexión se apoyó en la interpretación parte-todo de la fracción.

A esta fracción se sumaron once lados de

unidad de cuadrícula antes del acercamiento, que fueron expresadas como octavas partes para proceder con la operación. Las unidades 11 en cuestión fueron transformadas en octavas partes de la siguiente manera:

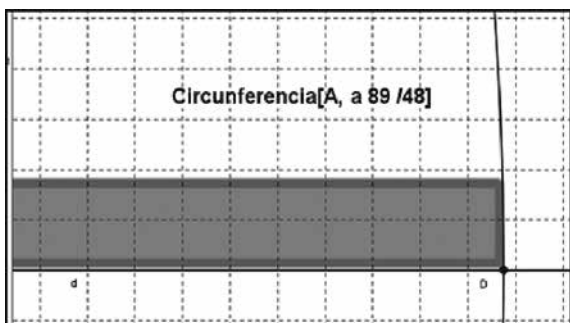
$$11 = 11 \cdot 1 = 11 \cdot \frac{8}{8} = \frac{88}{8}$$

En este razonamiento, la idea de fracciones equivalentes surge cuando se establece tal relación entre 1 y  $\frac{8}{8}$ . En conclusión, las 11 unidades representan  $\frac{88}{8}$  de un lado de cuadrícula. En consecuencia, sumaron esta fracción con la obtenida anteriormente. Esto es:  $\left(\frac{1}{8} + \frac{88}{8}\right)$  de un lado de unidad de cuadrícula, lo que es igual a  $\frac{89}{8}$  de esta totalidad.

Y como cada lado de una unidad de cuadrícula representa  $\frac{1}{6} \cdot a$  en este paso, la fracción anterior fue escrita de la siguiente manera:  $\frac{89}{8} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot a\right)$ , expresión que fue simplificada de la siguiente forma:

$$\frac{89}{8} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot a\right) = \left(\frac{89}{8} \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot a = \frac{89 \cdot 1}{8 \cdot 6} \cdot a = \frac{89}{48} \cdot a$$

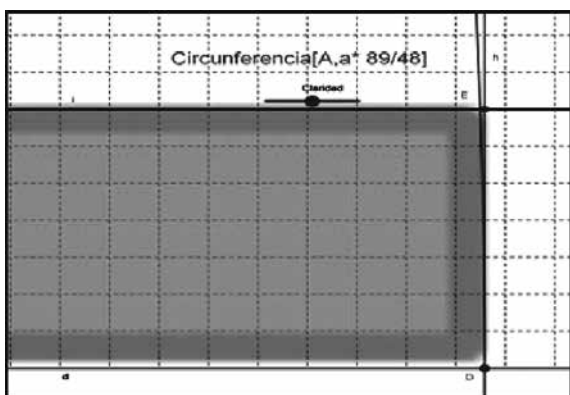
Conocido este valor, las estudiantes procedieron a construir una circunferencia centrada en  $A$  y con un radio  $\frac{89}{48} \cdot a$ , la cual se rotuló con la letra  $e$ . Esta curva les permitiría localizar el vértice inferior derecho tras intersectarla con la recta  $d$ . De esta manera, el vértice requerido sería el punto de intersección a la derecha de  $A$ , el cual fue rotulado con la letra  $D$  (ver Figura 8).



**Figura 8. Posición del vértice inferior derecho**  
Fuente: Elaboración de los autores

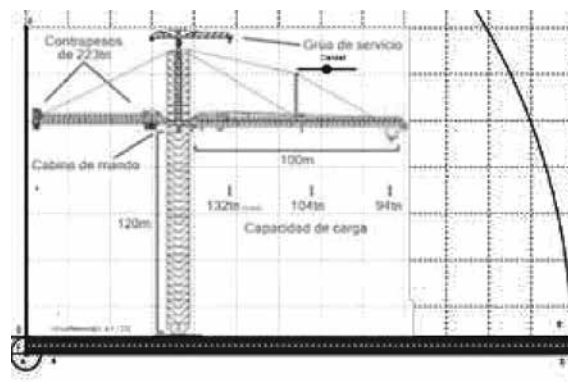
*Localización del vértice superior derecho*

Al inicio del paso anterior, las estudiantes habían ubicado al vértice superior derecho sobre una recta perpendicular al patrón  $a$  por el vértice  $C$ . Esta recta fue construida y rotulada con la letra  $i$ . El momento fue propicio para reconocer, además, que este cuarto vértice estaba contenido en una recta paralela al segmento patrón  $a$  por el punto  $D$ . Luego de construir esta otra recta, llamada  $h$  por el GeoGebra, las estudiantes observaron que el vértice superior derecho ocupaba la posición del punto de intersección entre  $i$  y  $h$ . Al determinar este punto de intersección, obtuvieron el punto  $E$ , que es el vértice superior derecho (ver Figura 9).



**Figura 9. Posición del vértice superior derecho**  
Fuente: Elaboración de los autores

Conocidos los cuatro vértices del rectángulo, se procedió a construir este cuadrilátero con el GeoGebra, usando la herramienta *Polígono* y haciendo clic en los vértices, siguiendo la secuencia:  $A-C-E-D$ . La tarea de construir el corredor vial finalizó con la representación del rayado de la carretera, el cual fue creado a partir de un segmento con extremos en los puntos medios de los lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{DE}$ . A este segmento se le cambió su color y apariencia para asemejarlo más a la realidad. En la Figura 10 se puede ver el resultado de esta tarea.



**Figura 10. Resultado de la resolución de la tarea**  
Fuente: Elaboración de los autores

**Conclusiones**

La dinámica de simulación que ha generado este trabajo se apoyó en el reconocimiento de los objetos geométricos más representativos de las partes de la grúa torre. Aunque el éxito de este proceso depende, en gran medida, de la experiencia y saberes previos de los involucrados, la intervención del promotor en el momento de la simulación fue clave para facilitar la emergencia de un conocimiento matemático en acción, el cual tomaba lugar en los discursos de las estudiantes, muchas veces de manera inconsciente.

Durante la simulación del corredor vial, el rol desempeñado por el concepto de fracción fue determinante, por ejemplo, al momento de localizar la posición de los vértices superior izquierdo e inferior derecho del rectángulo. Mediante la aplicación de una técnica basada en la estimación e interpretación de las fracciones involucradas como parte-todo, reparto y operador, las estudiantes lograron validar la técnica a través de la teoría matemática subyacente. En este particular, se notó que una perspectiva funcional de la interpretación de fracción como operador ayudó a dar sentido a una técnica consistente en expresar una composición de funciones lineales como una simple transformación del segmento  $a$  según una fracción  $\frac{a}{b}$ .

La conexión entre las distintas interpretaciones y otras nociones matemáticas también se puso de manifiesto. Por ejemplo, en el primer intento por localizar el vértice superior izquierdo, la fracción como parte-todo ayudó a establecer la relación entre el borde izquierdo del corredor vial y el lado correspondiente a la unidad de cuadrícula sobre la cual este borde descansaba – fracción  $\frac{1}{2}$  como parte-todo. Inmediatamente después, esta fracción fue usada como un factor de conversión sobre una novena parte del segmento  $a$  –la longitud del lado de una unidad de cuadrícula– que, luego de ser expresada en notación matemática, fue tratada como una composición de funciones. Aunque establecer conexiones entre contenidos matemáticos puede resultar un proceso difícil para los estudiantes y profesores (Segovia & Rico, 2001), la diversidad de con-

tenido matemático presente en esta experiencia concreta de simulación confirma el potencial de estos entornos para fomentar el establecimiento de conexiones entre la matemática, de una forma más espontánea. Esta conclusión se corresponde con otras experiencias de simulación que hemos llevado a cabo como grupo en otros escenarios (Cervantes, Rubio & Prieto, 2015; Gutiérrez & Prieto, 2015; Prieto, Luque & Rubio, 2013).

En cuanto al GeoGebra, fue de gran utilidad la cuadrícula que este software dispone, ya que esta forma de subdivisión de la zona de trabajo en cuadrados congruentes facilitó el reconocimiento de totalidades y porciones de estas totalidades que derivaron en el cálculo de ciertas medidas requeridas en la construcción. Las ventajas en la utilización de la cuadrícula aumentaron con el apoyo del acercamiento y alejamiento a zonas específicas de la imagen. A través de estas opciones se estableció la equivalencia entre fracciones como consecuencia de nuevas particiones o el reagrupamiento de porciones iguales de la cuadrícula, que se mostraban en la interfaz del GeoGebra de manera automática.

Sin lugar a dudas, el concepto de fracción fue el núcleo temático con mayor presencia en la simulación del corredor vial de la grúa torre. Seguramente su uso en la construcción del resto de las partes seguirá siendo necesario. Sin embargo, identificar cuándo una u otra interpretación de la fracción puede y debe emplearse para avanzar en la construcción no resultó fácil para las estudiantes. De manera especial, se evidenciaron

problemas para interpretar matemáticamente ciertas proposiciones que iban surgiendo en la simulación, como por ejemplo: “el segmento patrón contiene tres veces y un cuarto al borde inferior de corredor vial” o “el borde inferior del corredor vial es ochenta y nueve veces las cuarenta y ocho-avas partes del segmento patrón”, las cuales se iban superando con el apoyo de mucha práctica y lectura sobre las fracciones.

A pesar de estas dificultades, consideramos que esta experiencia de simulación ha permitido a las estudiantes adquirir destrezas en el uso integrado de la matemática y del GeoGebra, sobre la cual vale la pena profundizar.

### Referencias

- Andonegui, M. (2006). *Fracciones I. Serie Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Caracas, Venezuela: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Cervantes, A., Rubio, L. & Prieto, J. L. (2015). Una propuesta para el abordaje de la refracción y reflexión total interna utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 4(1), 18-28.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Clark, D. B., Nelson, B., Sengupta, P. & D'Angelo, C. (2009, octubre). *Rethinking science learning through digital games and simulations: Genres, examples, and evidence*. Presented at the Learning science: Computer games, simulations, and education workshop sponsored by National Academy of Sciences, Washington, D.C.
- Crespo, C. (2009, noviembre). *El aula actual: un desafío para el profesor de matemática*. Conferencia presentada con motivo de los 50 años del Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico, Buenos Aires.
- Gutiérrez, R. & Prieto, J. L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión . *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 88, 115-126.
- Hilton, M. & Honey, M. A. (Eds.) (2011). *Learning science through computer games and simulations*. National Academies Press.
- Hohenwarter, M. & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Mathematics and Its Applications*, 7, article ID: 1448.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.
- Laborde, C. (1998). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp.33-48). Bogotá: Una Empresa Docente.
- Llinares, S. & Sánchez, J. (1997). *Fracciones*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

- Osorio, P., Ángel, M. & Franco, A. (2012). El uso de simuladores educativos para el desarrollo de competencias en la formación universitaria de pregrado. *Revista Q*, 7, 1-22.
- Pugnaroni, L. (2008). Los simuladores. El papel de la simulación en la ciencia. *Ciencia Hoy*, 18(105), 27-34.
- Reyes-Gasperini, D. (2010). Reflexiones acerca del aula actual, como desafío para el profesor de matemática. *Premisa*, 12(44), 44-50.
- Reyes, F., Sierra, G. & Reyes, J. (2015). La grúa torre y el secreto de su andamiaje. En J. L. Prieto & R. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.
- Ríos, Y. (2008). *Las fracciones: sus representaciones externas e interpretaciones* (Tesis doctoral). Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.
- Ríos, Y. (2010). *Los organizadores didácticos sobre las fracciones* (Trabajo de grado). Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.
- Prieto, J. L., Luque, R. & Rubio, L. (2013). Cuadriláteros con GeoGebra. Una secuencia de formación docente en la enseñanza de la geometría con tecnologías libres. *Revista de la Universidad del Zulia*, 4(9), 115-130.
- Segovia, I. & Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp.83-104). Madrid, España: Síntesis.
- Strässer, R. (2002). Research on dynamic geometry software (DGS) – an introduction. *Zentralblatt für Didaktik der mathematik*, 34(3), 65.
- Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravenmeijer, K., Van Herpen, E. & Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, decimals and Proportions. A Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.