Educación y Humanismo 21(37): pp. 120-138. Julio-Diciembre, 2019.
DOI: http://dx/10.17081/eduhum.21.37.3459

EDUCACIÓN Y HUMANISMO

Argumentos de estudiantes de primaria en el contexto del álgebra temprana

Primary School Students' arguments in early algebra context

Jonathan Cervantes-Barraza
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México
Sonia Valbuena Duarte
Yovana Paternina
Universidad de Atlántico, Barranquilla, Colombia.

Open Access:

ISSN: 0124-2121
E-ISSN: 2665-2420

ARTÍCULO RSULTADO DE INVESTIGACIÓN

Editor:
Patricia Martínez Barrios
Universidad Simón Bolívar

Correspondencia:
Jonathan Cervantes
jacbmath@hotmail.com

Recibido: 2019-05-21
Aceptado: 12-06-19
Publicado: *19-07-19*

DOI:
10.17081/eduhum.21.37.3459

Resumen

Objetivo: caracterizar los argumentos emergentes en estudiantes de cuarto grado de primaria al resolver tareas en el contexto del álgebra temprana. **Método:** Se implementó el estudio de casos para recolectar evidencia empírica de los argumentos y los niveles de algebrización de estudiantes de cuarto grado de primaria. Para reconstruir y analizar los argumentos se utilizó el modelo *Toulmin* junto con los niveles de algebrización. **Resultados:** Los resultados reportan los argumentos construidos por estudiantes de cuarto grado de primaria en la solución de tareas del álgebra temprana, en este contexto se reconoce que los estudiantes y profesores manifiestan dificultad en el proceso de argumentar desde la matemática. **Discusión y Conclusiones:** Se considera que la integración de tareas que buscan promover la argumentación y el álgebra temprana favorece el desarrollo de habilidades como: razonar, justificar y comprender conceptos matemáticas.
Palabras clave: Álgebra temprana, Argumentación, Pensamiento Algebraico y Matemática.

Abstract

Objective: this paper aims to characterize emerging arguments for fourth grade students of a primary school when solving tasks in early algebra. **Method:** a case-study, in order to collect empirical evidence of the arguments and algebra levels of fourth grade students of primary school, is implemented. The Toulmin model to reconstruct and analyze arguments is used. **Results:** results report arguments constructed by fourth grade students of a primary school in the solution of tasks in the early algebra; in this context, students and professors consider that there is a difficulty in the process of arguing from the mathematics. **Discussion y Conclusion**: the integration of tasks looking for promoting argumentation and early algebra, favors the development of skills such as: reasoning, justifying and understanding mathematical concepts.
Keywords: Early Algebra, Argumentation, Algebraic Thinking, Mathematics.

Cómo citar este artículo (APA): Cervantes-Barraza, J., Valbuena, S. & Paternina, Y. (2019). Argumentos de estudiantes de primaria en el contexto del álgebra temprana. *Educación y Humanismo*, 21(37), 120-138. DOI: 10.17081/eduhum.21.37.3459

Introducción

Investigaciones en Educación Matemática reconocen la argumentación como parte esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a lo largo de la educación primaria, secundaria y nivel superior (Cervantes-Barraza & Cabañas-Sánchez, 2018, 2019; Rumsey, Guarino, Gildea, Cho & Lockhart, 2019; Knipping & Reid, 2015). Al mismo tiempo, se aborda desde diferentes ámbitos educativos como una competencia que los estudiantes deben desarrollar (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006; Goizueta & Planas, 2013), como una habilidad cognitiva que facilita a los estudiantes justificar con razones las formas de proceder ante una tarea matemática. Y como medio que permite a los estudiantes desarrollar la comunicación de ideas matemáticas, se responsabilicen de sus conocimientos y mantengan una participación activa dentro del salón de clase (Benítez, Benítez & García, 2016). En los procesos argumentativos, son necesarios los conocimientos matemáticos previos, estos facilitan que los estudiantes: comprendan actividades matemáticas, afiancen los conceptos matemáticos impartidos desde los primeros grados escolares, de tal manera que no se reserven hasta grados escolares avanzados (secundaria o bachillerato) (Cervantes-Barraza & Cabañas-Sánchez, 2018).

En el contexto de las ciencias, la matemática se constituye por una diversidad de ramas, que por mencionar algunas indicamos las presentes en el curriculum de matemáticas: aritmética, álgebra, geometría, estadística y probabilidad; cada una de estas se enmarcan bajo un pensamiento: el numérico, espacial y/o algebraico (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Se reconoce que la argumentación está presente en los diferentes pensamientos de forma transversal, pues es el medio por el cual los estudiantes externan desde el lenguaje, razonamientos producto de actividades cognitivas (Por ejemplo, analizar, sintetizar, abstraer, inferir entre otras). En este sentido, hacemos énfasis sobre el pensamiento algebraico, considerándolo objeto de estudio en los argumentos que construyen estudiantes de primaria al validar sus respuestas a tareas del álgebra temprana.

Ubicados en el plano curricular, en particular el de la educación primaria, los planes y programas de estudios de matemáticas no refieren al álgebra como parte del contenido de los libros de texto, sin embargo, investigaciones y currículos de diversos países (Por ejemplo, Estados Unidos, México, Canadá, entre otros) han implementado la propuesta del álgebra temprana. Esta se ha convertido en una tendencia actual en la agenda de la investigación sobre matemática educativa, pues existe la necesidad de incorporar contenidos escolares del álgebra desde edades tempranas (Cai & Knuth, 2011; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014; Cabañas-Sánchez, Salazar & Nolasco-Hesiquio, 2017).

Investigaciones que abordan esta propuesta resaltan el desarrollo del pensamiento algebraico en el aprendizaje de las matemáticas, que propende la inclusión del razonamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad (Pereira, Bermúdez & Mesa, 2016). Se

Educación y Humanismo 21(37): pp. 120- 138. Julio-Diciembre, 2019. DOI: 10.17081/eduhum.21.37.3459

reconocen dificultades de los estudiantes en contexto del aprendizaje del álgebra, esto razón de ausencia del pensamiento lógico, carencias de conocimientos previos relativos al álgebra, significativos e incoherencias al explicar o exponer tareas propias del álgebra (Vergel, 2015). Se ha documentado también, errores algebraicos cometidos por estudiantes egresados de la educación secundaria-bachillerato en el contexto de la solución de tareas, Ramírez, Fregoso, Calderón, Cueva, Martínez & Sánchez (2008) reportan que confunden la multiplicación de fracciones con la división, emplean mal operaciones aritméticas, determinar la solución de ecuaciones cuadráticas y problemas con los casos de factorización. Por otro lado, cuando los estudiantes resuelven una situación problema que les exige poner en práctica sus habilidades para argumentar, estos presentan dificultades en el manejo de conceptos y procedimientos básicos de la matemática. En este proceso, se reconoce que el rol del profesor es importante. Por tanto, se infiere que en la planificación y desarrollo de las clases de matemáticas manifiestan escases de actividades, tareas, problemas que fomenten la argumentación en sus estudiantes (Gamboa, Planas & Edo, 2010).

En función de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del algebra, los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas en Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 2006) indican que los estudiantes alcancen un nivel matemáticamente competente, necesitan de una serie de habilidades que deben desarrollar. En particular, razonar y usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios para validar y refutar conjeturas (Ministerio de Educación Nacional, 2006; Cervantes-Barraza & Cabañas-Sánchez, 2018; Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez & Reid, 2019). En línea con lo anterior, en la enseñanza y aprendizaje del álgebra se debe analizar bien las premisas de una conjetura, establecer razones lógicas y argumentos bien estructurados con el fin de validarlos o refutarlo. Sin embargo, los argumentos de los estudiantes presentan en su contenido la falta fundamentación matemática y carecen de ideas matemáticas claras para distinguir los componentes que lo conforman (Socas, 2011).

Producto de la revisión de la literatura sobre investigaciones reportadas y los planes de estudios de matemáticas a nivel primaria, se reconoció que apuntan sobre sobre dos grandes aspectos en la enseñanza de la matemática. Uno tiene que ver con el desarrollo del pensamiento algebraico y el segundo con la capacidad que tienen los estudiantes para construir argumentos en contextos de la solución de tareas. En este sentido, en esta investigación se trazó como objetivo principal, caracterizar los argumentos emergentes en los estudiantes de cuarto grado de primaria al resolver tareas en el contexto del álgebra temprana. En función de lograr el objetivo trazado, implementamos como herramienta metodológica el modelo de Toulmin (2003) para reconstruir los argumentos de los estudiantes. Aunado a esto, retomamos los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi (2014) con el fin de reconocer los niveles de razonamiento algebraico inmerso en los argumentos de los estudiantes.

Referentes teóricos

La propuesta del álgebra temprana

Como parte de la cultura matemática, se reconoce que esta continúa sus profundas investigaciones sobre las estructuras fundamentales del número, espacio, dinámica, que tiene como implicancia la producción de numerosas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Bass, 2008). También, se han realizado múltiples investigaciones que abordan y fomentan la incorporación del álgebra en la educación básica primaria. En décadas pasadas, varios países integraron conceptos algebraicos en el currículo de la matemática, en los Estados Unidos, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) propuso el álgebra como una cadena de contenidos entre todos los niveles académicos (NCTM, 2000; Cai & Knuth, 2011; Vergel, 2015, 2016, 2018). En el mismo sentido, Socas (2011) argumenta que en las últimas dos décadas se han realizado a nivel internacional, numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de la educación primaria. Por tanto, introducir el pensamiento algebraico en grados elementales es una necesidad que remonta la idea de estudiar conceptos del álgebra en un nivel formal como en grados posteriores (Aké, 2013).

Autores como Carraher (2006) y Kaput (1998), recomiendan que la aritmética debe ir de la mano del álgebra para que los estudiantes tengan un conocimiento global de conceptos previos y nuevos, para que así cuando se enfrentan a temas con un nivel de complejidad avanzado no presenten dificultades en su comprensión. Por su parte, Kieran (2007) afirma que uno de los problemas en que los estudiantes presentan dificultades es el aprendizaje del álgebra, en razón de la separación de estas dos disciplinas. Cai y Knuth (2011) abarcan el álgebra temprana desde perspectivas curriculares, cognitivas e instruccionales. La incorporación de las temáticas con estas perspectivas, son consideradas fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En cuanto al Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas NCTM (2000), indican que los contenidos curriculares influyen sustancialmente en el aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, los docentes son los encargados y responsables de desarrollar los contenidos curriculares referentes a lo algebraico. Este se caracteriza en tres elementos, los cuales el docente de matemática debe tener en cuenta al momento de diseñar actividades que permitan a los estudiantes desarrollar el pensamiento algebraico (Vergel, 2018).

1. El sentido de indeterminación, que hace referencia a los objetos básicos entre los que se tiene las incógnitas, variables y parámetro.
2. La analiticidad, se analiza los objetos básicos indeterminados, identificando el carácter operatorio de los objetos básicos.
3. La designación simbólica o expresión semiótica de los objetos.

En función de lo anterior es importante resaltar lo siguiente:

> La capacidad de los niños para el pensamiento funcional plantea la cuestión de cómo podría nutrirse del currículo y la instrucción en los grados de primaria. Abogamos aquí por un hábito

> de mente, no solo materiales curriculares, mediante el cual los maestros entienden cómo transformar y extender sus recursos actuales para que el contenido aritmético de los grados primarios se pueda extender a oportunidades para construir patrones, conjeturar, generalizar y justificar relaciones matemáticas y cómo insertar esta matemática dentro de los tipos de normas socio-matemáticas que permiten a los niños construir una generalidad matemática (Cai & Knuth, 2011, p. 134).

Esta idea clave tiene la intensión de resaltar la necesidad que existe de promover el pensamiento algebraico temprano desde la vinculación de los estudiantes con tareas cuyo contenido matemático tome como punto de partida operaciones aritméticas y potencien aspectos del razonamiento algebraico. En apoya al planteamiento anterior, Márquez (2012) señala la necesidad de establecer caminos que permitan la puesta en práctica de estrategias pedagógicas innovadoras, como la integración del algebra temprana y la argumentación, esto con el objetivo de desarrollo de las destrezas y habilidades en los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

Nivel de algebrización según la actividad matemática realizada

Los niveles de Algebrización se le atribuyen a la actividad matemática que lleva a cabo el estudiante para resolver un problema o tarea. En este sentido, se reconocen tareas absolutamente algebraicas con enunciados constituidos por expresiones u objetos algebraicos como incógnitas, variables, ecuaciones, patrones numéricos y estructuras algebraicas (Cai & Knuth, 2011; Godino, Aké, Gonzato, & Wilhelmi, 2014).

- ✓ Nivel 0 de algebrización: en este nivel se ubican las actividades matemáticas que no presentan rasgos propios del álgebra, pues se caracteriza por medio de objetos particulares como los numéricos, icónicos o gestual, pueden estar intervenidos símbolos que denotan un valor desconocido.
- ✓ Nivel incipiente de algebrización (nivel 1): en este nivel se ubica las actividades matemáticas que relacionan objetos intensivos, donde se reconoce una generalización desde el lenguaje natural, numérico y gestual.
- ✓ Nivel intermedio de algebrización (nivel 2): En este nivel las tareas se desarrollan reconociendo una generalización, pero no se opera con las variables.
- ✓ Nivel consolidado de algebrización: En este nivel se realizan alteraciones en las formas simbólicas de las expresiones conservando la equivalencia, donde intervienen indeterminadas incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares.

Argumentación en el salón de clases

En el contexto de la educación primaria y bajo un enfoque del juego como estrategia didáctica se ha reportado que los estudiantes pueden desarrollar habilidades de la inteligencia lógico-matemática, tales como sacar conclusiones a partir del análisis de conjuntos de números enteros, así como precisar cuándo un número es mayor que otro, construcción de series numéricas, y para la temática de ecuaciones, se fortaleció la habilidad para solucionar problemas cotidianos con base en una información mostrada en un lenguaje ordinario que debía ser llevado a un lenguaje matemático (Valbuena, Padilla, & Rodríguez, 2018; Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez, & Ordoñez-Cuastumal, 2017).

La argumentación vista como una de las habilidades básica que aporta de manera significativa en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, permitiéndoles ser protagonistas de su propio aprendizaje, de tal manera que puedan fortalecer su desarrollo intelectual, lograr conocimientos sólidos y armarlos para la búsqueda de los nuevos conocimientos (Rivera Pérez & Ruíz, 2006). Se considera también, un tema que compete en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues contribuye significativamente en el modo de razonar de los estudiantes, a que justifiquen las ideas planteadas durante actividades desarrolladas en el salón de clase de las matemáticas (MEN, 2006). Y sustancial por fortalecer los pensamientos que emergen en las matemáticas, particularmente, en el pensamiento algebraico.

En la matemática escolar, la argumentación se consolida como una habilidad fundamental, a través de esta se pueden comunicar los resultados en un lenguaje matemático, dilucidar los mecanismos, transmitir y asentar juicios inductivos y conclusiones (Pedreros, 2017). Lo que permite a los estudiantes indagar, relacionar y comunicar razones que justifiquen la solidez de sus argumentos ante el estudio de un concepto matemático. Es fundamental el desarrollo de las habilidades argumentativas en todos los grados de la escolaridad, en particular a nivel primaria (NCTM, 2000). Esta habilidad no se puede reservar hasta los últimos años de la escolaridad. En razón de que los estudiantes son capaces de producir argumentos en primaria, estos basados en dibujos, objetos físicos y demás (CCSSI, 2010). Por lo que, en el plano de la investigación en argumentación y educación, han contribuido de manera significativa en identificar las ventajas de desarrollar esta habilidad del pensamiento. Además, esta mantiene una relación directa con la lingüística, permite al individuo desenvolver o expresar sus ideas con claridad y favorecer la generación de un ambiente de aprendizaje más crítico (Archila, 2013).

En el marco de esta investigación, la argumentación se considera como una habilidad básica y necesaria para que el estudiante explique, justifique y convenzan a los demás a través de razones lógicas sus sobre sus ideas o conclusiones ante una comunidad educativa. Esta habilidad se apoya de manera significativa al propiciar la construcción de conocimientos (Schwaz, Neuman & Ilya, 2003), en función de que logren hacer comparaciones y apliquen sus conocimientos previos y tomar posiciones según sus criterios.

Argumentos que emergen en los estudiantes al resolver tareas en clase de matemáticas

La actividad matemática no siempre se lleva a cabo de la manera más conveniente para el logro de los aprendizajes, lo que implica el desempeño y actitud de apatía por parte de los estudiantes hacia el estudio de la matemática y sobre todo apartan el interés para elaborar discursos como la argumentación y construcción de argumentos que relacionen sus acciones con el saber matemático en juego (Reyes & Prieto, 2015). En este contexto, es importante reconocer la diferencia entre la argumentación en el salón de clase en

Educación y Humanismo 21(37): pp. 120- 138. Julio-Diciembre, 2019. DOI: 10.17081/eduhum.21.37.3459

matemáticas y argumentación matemática. Solar (2018) plantea que la primera es "el intento de convencer o persuadir al otro en el aula de matemáticas" y la siguiente es "el proceso de prueba que enfrenta un resolutor ante una tarea matemática sin necesariamente confrontar dos puntos de vista". En función de las perspectivas presentadas, Toulmin (2003) distingue dos tipos de argumentos: los argumentos analíticos, caracterizado por deducciones lógicas formales netamente matemáticas, es decir, tautologías. Y los argumentos sustanciales, son informativos, el significado de las premisas varía de acuerdo a la aplicación o modificaciones de nuevos casos (Krummheuer, 1995). Este tipo de argumento "se presentan en las fases de búsqueda y formulación de conjeturas, en las cuales se produce una relación de justificaciones de naturaleza semántica, durante la resolución de problemas, empleando la inducción empírica como método para enunciar las proposiciones" (Benítez, & García, 2016, p. 177).

Metodología

Bajo un enfoque cualitativo, en esta investigación se implementó el diseño metodológico *estudio de casos* (Martínez-Carzo, 2006). Este se apoya desde una perspectiva interpretativa que pretende encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen (Hernández-Sampieri, Fernández-Collado & Baptista, 2014), es decir, se analiza y comprende la realidad de los participantes atribuyéndole un significado a las acciones de los individuos que guardan características requeridas en la investigación.

En la investigación se tomaron datos no estandarizados, estos se recolectan desde un encuadre y punto de vista de los individuos participantes, estos respondieron preguntas abiertas, con el objetivo de obtener datos a través de lenguaje tanto escrito como verbal. Participaron dos estudiantes de cuarto grado de primaria y sus dos respectivos docentes de matemáticas (de dos instituciones diferentes; una del sector público y otra del sector privado en la ciudad de Barranquilla, Atlántico – Colombia). Bajo la propuesta metodológica de Martínez-Carazo (2006), se tomaron las dos primeras fases propuestas, en el contexto de la investigación:

Fase 1 - Recolección de la información: la información se recolecta a través de fuentes, que para esta investigación se tomaron dos estudiantes de cuarto de primaria y tres docentes del mismo grado. Se realizaron dos pruebas diagnósticas, una para identificar la habilidad argumentativa de los estudiantes y otra para reconocer la capacidad del docente de desarrollar habilidades argumentativas a los estudiantes en el salón de clase.

Fase 2 - Análisis de la información: en esta fase se procede a describir y analizar los datos obtenidos en la fase 1, bajo un enfoque inductivo, guiados por los referentes teóricos de esta investigación, los niveles de algebrización aplicados en los argumentos de los estudiantes. En esta fase el análisis se lleva a cabo con base en las siguientes etapas (Martínez-Carazo, 2006).

- ✓ *Análisis en sitio:* en esta etapa se hace un análisis mientras se aplica la prueba a los estudiantes y docentes, por lo cual durante este tiempo se registra por medio de una grabación, para luego transcribirla y observar las diferentes respuestas. Además, el investigador posee una bitácora de observación, para tomar apuntes con el fin de identificar, verificar y contrastar la información obtenida.
- ✓ *Trascripción de los datos:* Aplicada la prueba y realizada las observaciones se inicia un proceso de estructuración y organización de acuerdo a las dimensiones, variables y categorías que dan cuenta de la problemática de la investigación.
- ✓ *Foco del análisis:* Se enfoca en el análisis desde las áreas de interés que estén relacionadas directamente con el problema que rige en la investigación.

Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

Prueba a docentes

Esta prueba se divide en dos partes. La primera está constituida por preguntas abiertas formuladas con el fin de identificar estrategias que fomenten la argumentación en el salón de clase: *Defina con sus palabras ¿Qué es la argumentación?, ¿Es importante para usted como docente que sus estudiantes argumenten en el aula de las matemáticas?, ¿Realiza actividades para fomentar la argumentación en los estudiantes? Mencione por lo menos una de ellas.* La segunda parte (ver figura 1) se aplicó una actividad matemática orientada a que el docente argumentara sobre siete conjeturas y determinar su valor de certeza en el contexto del álgebra.

Parte II

1. Lea y argumente las siguientes conjeturas. Tome la posición de un estudiante competentemente para resolver esta actividad.

Definición: Un número abundante es un entero **n** cuyos divisores suman más de **2n**.
Definición: Un número perfecto es un entero **n** cuyos divisores suman exactamente **2n**.
Definición: Un número deficiente es un entero **n** cuyos divisores suman menos de **2n**.
Ejemplo: 12 es un número abundante, porque $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ y $28 > 2 \times 12$.
Sin embargo, 14 es un número deficiente, porque $1 + 2 + 7 + 14 = 24$ y $24 < 2 \times 14$.

Figura 1. Segunda parte de la prueba para los profesores.

Prueba para los estudiantes

Esta prueba se divide en dos partes. La primera está conformada por tres preguntas formuladas con el fin de identificar si los estudiantes conocen sobre argumentación y si su respectivo docente contribuye para el desarrollo de esta habilidad. Estas preguntas están relacionadas con la primera parte de la actividad del docente. La segunda parte se constituye por 5 preguntas donde el estudiante explica el procedimiento matemático.

Criterios de análisis

De las dos pruebas diagnósticas de los estudiantes y profesores, en la primera se tuvo en cuenta dos variables: el nivel de razonamiento algebraico de acuerdo a la actividad matemática desarrollada por los estudiantes y las características de los argumentos emergentes para el sustento de las tareas planteadas. En la prueba del docente, se tuvo en cuenta la veracidad de las respuestas en relación con la de los estudiantes en el desarrollo de la prueba y la capacidad de argumentar en el contexto de tareas matemáticas.

Análisis de los argumentos de los estudiantes en matemáticas

En el contexto de la argumentación, la obra de Toulmin (2003) marcó un cambio radical en la forma de analizar los argumentos, pues enfoca su atención en las estructuras de los argumentos basado en un modelo que aborda aspectos sustanciales, este nominado "Modelo Argumentativo de Toulmin". Su estructura se compone de seis elementos: datos, garantía, respaldo, conclusión, refutación y el calificador modal (ver figura 2). La conclusión (C) es la declaración que el argumentador presenta ante una audiencia, los datos (D) son los fundamentos en los que se basa la conclusión, la garantía (W) justifica la conexión entre los datos y la conclusión. Este elemento presenta un apoyo extra, el respaldo (B), evidencia un soporte general con base en teoremas, axiomas o postulados, el calificador modal (Q) califica la conclusión expresando su grado de confianza y la refutación (R) niega potencialmente la conclusión, evocando casos bajo las cuales la garantía no soporta la conexión datos-conclusión (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007; Toulmin, 2003).

En el contexto de la educación matemática, Krummheuer (1995) aplicó este modelo con la intensión de analizar los argumentos de los estudiantes. En sus resultados empíricos, hizo caso omiso a la refutación y al calificador modal, los consideraba innecesarios para analizar los argumentos matemáticos de estudiantes. Por tanto, el esquema con el que implementó Krummheuer para un argumento está conformado por cuatro componentes: conclusión, datos, garantía y respaldo.

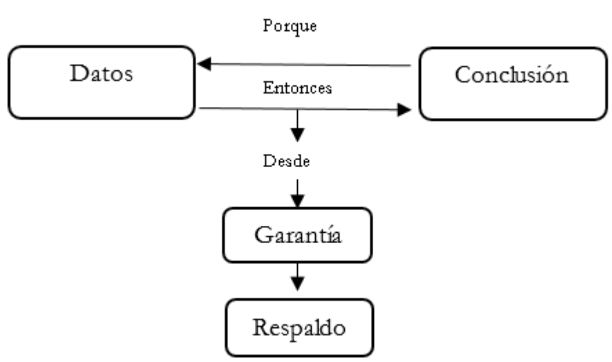

Figura 2. Esquema argumentativo de (Krummheuer, 1995)

Resultados

En el marco de los resultados de la investigación, presentamos el análisis de una prueba a un docente y a un estudiante bajo un enfoque descriptivo. Los datos se analizaron con base en los conceptos presentados en los referentes teóricos de la investigación.

Prueba diagnóstica a docentes

La concepción del docente sobre argumentación se relaciona con actividades del tipo "Formular, verificar conjeturas, comunicar y fundamentar a partir de razonamientos inductivos" (ver Cuadro 1). Que tiene que ver con el razonamiento implicado para probar un enunciado matemático. Sin embargo, cabe resaltar que la actividad que caracteriza la argumentación en el contexto escolar y en cualquier otro es convencer a una audiencia con razones.

Parte I: *Defina con sus palabras ¿Qué es argumentación?*   Docente A: *Argumentar es comprobar de forma razonada y veraz si alguna conjetura es falsa o verdadera*

Cuadro 1. Respuesta del profesor A en la parte I de la prueba.

En términos generales sobre la primera parte de la aplicación a los docentes, manifestaron que fomentan la argumentación en el salón de clase. Como evidencia, presentan un ejemplo de una actividad en la que un estudiante realiza el algoritmo de la división y le pide que justifique cada paso. Sobre este tipo de actividad, se reconoce que el ejemplo del docente no corresponde con el desarrollo de las habilidades argumentativas, en razón de que las actividades que buscan generar la argumentación demandan al estudiante un proceso de presentar razones que fundamenten su respuesta (conclusiones), establecer críticas (e. i., refutaciones) y convencer a los demás sobre la validez de sus argumentos (garantías) (Krummheuer, 1995; Cervantes-Barraza & Cabañas-Sánchez, 2018).

En efecto, la habilidad de argumentar le permite a los estudiantes y docentes explicar los resultados de las actividades matemáticas desde cualquier sub-área, en el contexto del razonamiento inductivo (Pedreros, 2017). El desarrollo de esta habilidad en los estudiantes acoge gran valor, ya que le permitirá enfrentar problemas tanto en matemáticas, lenguaje, sociales y de la vida cotidiana. Por lo que el docente debe reconocer la importancia de esta en el marco del pensamiento matemático (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Con la intensión de evidenciar la importancia de la argumentación en los docentes, estos reconocen las ventajas y la necesidad de desarrollarla en los estudiantes, a modo de ejemplo en el cuadro 2 presentamos una de las respuestas de a la pregunta: *¿Es importante para usted como docente que sus estudiantes argumenten en el aula de las matemáticas?*

Educación y Humanismo **21(37): pp. 120- 138. Julio-Diciembre, 2019.** DOI: 10.17081/eduhum.21.37.3459

¿Es importante para usted como docente que sus estudiantes argumenten en el aula de las matemáticas?
Docente A: Si es importante, porque al argumentar están comprobando y verificando los conocimientos adquiridos y los problemas propuestos.

Cuadro 2. Respuesta del profesor A en la parte I de la prueba.

La segunda parte de la tarea, el docente debía conjeturar sobre una lista de definiciones matemáticas (ver Cuadro 3) relacionadas con el álgebra. Por lo que se presentan las definiciones y las conjeturas establecidas por el docente A (ver Cuadro 4 y 5).

Parte II
1. Lea y argumente las siguientes definiciones. Tome la posición de un estudiante competentemente para resolver esta actividad.
Definición: Un número abundante es un entero **n** cuyos divisores suman más de **2n**.
Definición: Un número perfecto es un entero **n** cuyos divisores suman exactamente **2n**.
Definición: Un número deficiente es un entero **n** cuyos divisores suman menos de **2n**.
Ejemplo: *12 es un número abundante, porque* $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ *Y* $28 > (2 * 12)$*. Sin embargo, 14 es un número deficiente, porque*$1 + 2 + 7 + 14 = 24$ *y* $24 > (2 * 14)$*.*

Cuadro 3. Parte II de la prueba para profesores.

Su tarea es considerar las siguientes conjeturas y determinar, con pruebas, si son verdaderas o falsas. Por lo que el profesor presentó la validación de algunas conjeturas.

Conjetura 1. *Un número es abundante si y sólo si es un múltiplo de **6**.*
Múltiplos de $6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60\}$
D12=$\{1, 4, 3, 2, 6, 12\}$ suma =28; $2\ (12) = 24 \rightarrow si\ es\ abundante$

Cuadro 4. Prueba del profesor A sobre la conjetura 1.

El docente afirma que la conjetura es verdadera al concluir que es abundante, sin embargo, su argumento está incompleto, ya que muestra en su ejemplo un caso particular donde la afirmación "sí sólo si" se cumple. Pero, esto no se cumple para todos los casos, pues 20 es un número abundante y no es múltiplo de 6 (refutación), en consecuencia, esta afirmación del docente es falsa. Con base en el procedimiento efectuado, la solución proporcionada por el docente careció de solidez y fundamento para sostener su argumento para todos los casos, es decir respaldo.

Conjetura 2. *Si **n** es perfecto, entonces **kn** es abundante para cualquier **k ∈ N**.*
Si $n = 6\ \rightarrow 2(6) = 12$
D12=$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $\quad 2\ (12) = 24$
La suma de sus divisores es menor que 2n, por tanto es falso.

Cuadro 5. Prueba del profesor A sobre la conjetura 2.

El docente afirma que esta conjetura es falsa (conclusión), esto lo demuestra con un contraejemplo. En el proceso que lleva a cabo se puede observar que éste salta algunos pasos, por ejemplo, no indica los divisores de 6 y no muestra que la suma de estos es igual a 12, asimismo, no dice que 6 es un número perfecto (dato). Por otra parte, realiza el procedimiento para ver qué tipo de número es el 12 y al escribir sus divisores, no incluye al 6 (garantía). Por lo tanto, la suma de los divisores es incorrecta, y la suma de los divisores de 12 incluyendo el 6, es igual a 28 (como 28>2 (12)), por tanto, 12 es un número abundante.

De manera general, se infiere que el docente al afirmar que la validez de sus conjeturas, omite uno de los divisores, lo que implicó que sus argumentos no tengan un fundamento necesario para validar sus conclusiones. En suma, los argumentos del docente en el intento de mostrar la validez de la conjetura carecieron de generalidad (nivel 2 de algebrización), solo tomó casos particulares que no refieren a un conjunto generalizable con las mismas características.

Prueba diagnóstica a estudiantes

En la aplicación de la prueba diagnóstica a los estudiantes, se evidenció que el docente de matemáticas del estudiante fomentaba la argumentación en el salón de clase. Sin embargo, los resultados de la segunda parte, donde el estudiante *A* argumenta sobre unos problemas, lo que evidencia un contraste.

Estudiante A, Parte I
1. Defina con sus palabras ¿Qué es la argumentación?
2. ¿Su docente de matemáticas le habla acerca de la argumentación en el aula?
3. ¿El docente realiza actividades que fomente la argumentación en tareas algebraicas o en otra área de las matemáticas?

Cuadro 6. Parte I de la prueba para estudiantes.

Respuestas del estudiante A:
1. Es cuando explico algo como una cartelera.
2. Si porque cuando nos ponen hablar sobre lo que dijo la seño.
3. Si nos ponen hacer actividades.

Cuadro 7. Respuesta del estudiante A en la parte I de la prueba.

El estudiante A en esta primera parte expone que su docente de matemáticas enfatiza sobre la argumentación en el aula, asimismo, realiza actividades que permite desarrollar esta habilidad. La respuesta del estudiante y su docente mantienen una relación, sin embargo, cuando el estudiante recibió la prueba, este expresó que su docente nunca le había hablado de la argumentación y que él no sabía de lo que se le estaba preguntando. Por tanto, se encuentra un contraste en la respuesta escrita por el estudiante y la que este comunicó al inicio de la prueba. Ahora bien, el investigador al realizar la introducción de la prueba dio ideas para que este identificara si estos factores estaban presentes en el desarrollo de su clase de matemáticas, de lo cual se puede inferir que el estudiante pudo basar sus respuestas en estas explicaciones. Por otra parte, se infiere que lo afirmado por el docente A refieren a expectativas de la importancia de abordar la argumentación en el salón de clase, identifica su pertinencia, sin embargo, no realiza actividades que ayuden a desarrollar esta habilidad en los estudiantes.

Nivel de algebrización en la Actividad Matemática

En la segunda parte de la prueba, los estudiantes manifestaban sus argumentos en respuesta de la cuestión requería. En efecto, se identificaron situaciones donde el investigador los cuestionaba sobre los procedimientos empleados para la solución del problema planteado.

Parte II, Pregunta 1 Observe las siguientes igualdades:

$$8 = 5 + 3$$

$$27 = 7 + 9 + 11$$

$$64 = 13 + 15 + 17 + 19$$

?

¿Cuáles son las dos filas siguientes? Enunciar una regla general

Cuadro 8. Parte II de la prueba para estudiantes.

En este primer ejercicio el razonamiento del estudiante A se ubica en nivel 1 de algebrización o nivel incipiente, aunque el estudiante realizó un procedimiento aritmético, en el proceso de razonamiento estableció una relación genérica entre los números pares e impares (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014).

Investigador: ¿Qué tipos de números son el 5 y el 3?
Estudiante A: Son números impares
Investigador: Observa la siguiente fila**,** ¿los números son?
Estudiante A: Son impares
Investigador: ¿Qué número le sigue al 7 y al 9?
Estudiante A: 8 y 10
Investigador: Entonces el 8 y el 10 no están, pero si está el 11 que es el siguiente número del 10. Ahora, ¿Qué puedes decir de eso?
Estudiante A: Es una secuencia que va de números impares

El estudiante reconoce un patrón de recurrencia en la sucesión de números, al identificar que los números son impares y se saltan los números pares, es decir, que después de un número impar se le suma el número impar siguiente. Por tanto, el estudiante identifica una regla general acorde con el conjunto de números dados, lo cual le ayuda a establecer los términos siguientes de la secuencia.

Investigador: ¿Qué número sigue después del 11?
Estudiante A: 12...
Investigador: Pero el doce no está, por lo que sigue el número…
Estudiante A: 13, 15, 17, 19
Investigador: ¿Con qué número iniciaría la siguiente fila?
Estudiante A: 21…

Se reconoce que el profesor-investigador cumplió la función de guía ante las respuestas presentadas por el estudiante. No contribuyó de forma directa alguna respuesta, sino que con preguntas permitió que el estudiante reconociera una regla o patrón en la sucesión de números propuestos en la actividad matemática.

Estructura de los argumentos construidos por el estudiante A

En el contexto de la actividad matemática, el estudiante A presentó una serie de argumentos con la intensión de justificar su procedimiento y determinación de lo pedido. En un primer momento, el profesor investigador lo cuestiona sobre las características de los números proporcionados como dato, en lo que reconoce que son números impares (conclusión), de la forma ($2n+1$, *con* $n \in N$).

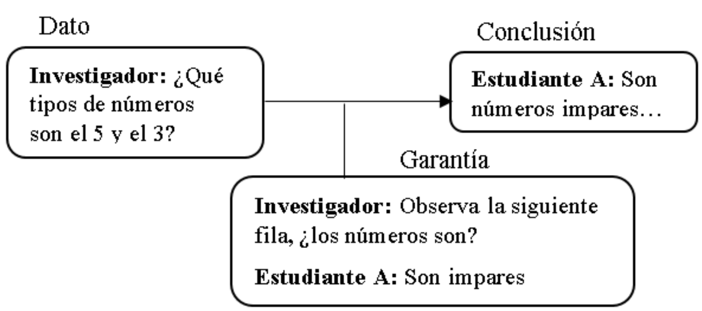

Figura 3. Estructura del primer argumento del estudiante A.

Su conclusión se respaldada en los números presentados como parte de la actividad matemática, es decir datos y las preguntas orientadoras que realiza el profesor investigador. Esto en razón de que agregó de forma implícita información que le permitió concluir (Por ejemplo ¿Qué tipos de números son el 5 y el 3?).

En un segundo momento, el profesor investigador orienta sus preguntas a la cuestión principal de la actividad matemática (ver Figura a), encontrando que el estudiante reconoce los números siguientes a 7 y 9 (dato). Además, identificó que los dos números no guardan el patrón identificado en un primer momento, en razón de que los números 8 y 10 son pares (conclusión). En cuanto al contenido de la garantía, el estudiante refiere a los números que guardan la regla identificada, como una secuencia de números impares.

Educación y Humanismo 21(37): pp. 120- 138. Julio-Diciembre, 2019. DOI: 10.17081/eduhum.21.37.3459

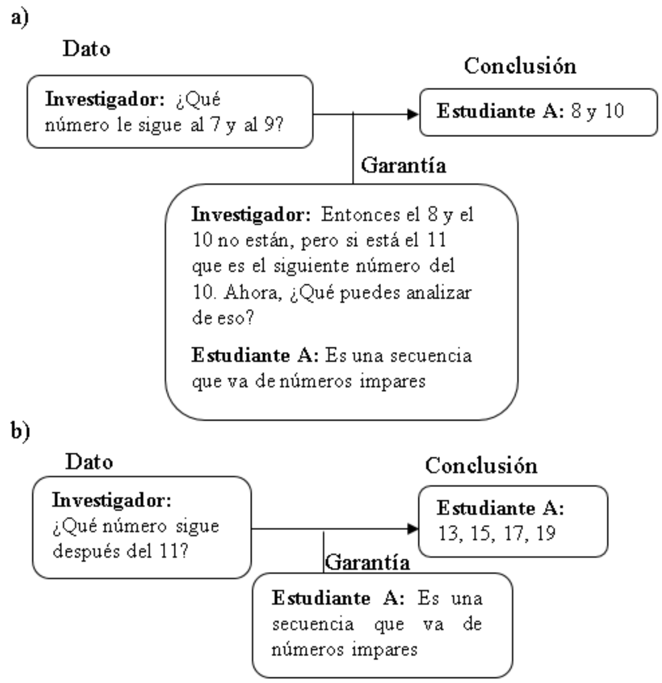

Figura 4. Estructura del segundo argumento del estudiante A.

La conclusión establecida por el estudiante A en el momento inicial, toma el lugar de garantía en el argumento a) y en el b) de la figura 4. Lo que le permitió concluir sobre los números siguientes de la sucesión, 13, 15, 17 y 19 (conclusión, Figura 4b). Además, reconoce que es una secuencia de números impares le garantiza determinar números correctos.

En suma, el estudiante presentó argumentos que refieren a una generalización de la suma de números impares, sin embargo, distinguió un número par de un impar. Se afirma también, que el estudiante argumentó el proceso que realizó con base en la información dada y la relación que guardan los números primos. Esto expresado en frases del tipo "se van saltando los pares" o es una secuencia de números impares". En cuanto a la estructura de los argumentos, son fundamentados en la estructura del núcleo de un argumento, datos, conclusión y garantía (Krummheuer, 1995).

Discusión y Conclusión

El álgebra en la educación primaria es una propuesta que brinda oportunidades a los estudiantes para que desarrollen el pensamiento algebraico desde edades tempranas. Es la argumentación y el álgebra temprana una combinación que permite a los estudiantes razonar y comprender los conceptos y relaciones matemáticas. De acuerdo a los resultados de los estudiantes, se logra evidenciar que manifiestan dificultad en el proceso de argumentar y se caracterizan por presentar razones carentes de fundamento en términos matemáticos. Sin embargo, se evidencia que el nivel de compresión sobre objetos matemáticos relacionados con el álgebra temprana y la capacidad de generar argumentos puede mejorar.

Como parte de las reflexiones se recomienda que los docentes implementen actividades que promuevan la argumentación en el salón de clases. Lo que conlleva a que mantengan una interacción entre pares y con esto, generen discusiones matemáticas en relación con los razonamientos de los demás estudiantes (Valbuena, Conde & Ortiz, 2018). Por lo que se considera importante, incluir características del pensamiento algebraico en las actividades matemáticas (Aké, 2013). Esta una oportunidad para que los estudiantes desarrollen el pensamiento algebraico y en cursos avanzados puedan conectarlos con conceptos matemáticos propios del álgebra.

En cuanto a las pruebas de los docentes, se infiere que no implementan actividades que fomenten la argumentación en el salón de clase de matemáticas, aun cuando son conscientes y tienen conocimiento de la importancia de abarcar esta habilidad del pensamiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Uno de ellos manifestó la dificultad en argumentar conjeturas, pues no presenta generalización de conjeturas que conllevan a las demostraciones requeridas en la tarea. En consecuencia, los respectivos estudiantes de los profesores presentan igual dificultad a un nivel de producir argumentos al momento de sustentar tareas en el álgebra temprana.

La investigación reporta la importancia de argumentar y razonar en el contexto del álgebra temprana, se abordó la argumentación y de forma transversal en la solución de tareas sobre nociones del álgebra temprana (Vergel, 2018). En este contexto se identificó la necesidad de fomentar la argumentación en los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de matemáticas e incluso de las demás materias escolares. Por lo que se parte de la labor docente, contribuir en los procesos de enseñanza de la matemática teniendo en cuenta los resultados plasmados en la investigación, se recomienda adaptar tareas de matemáticas cuya intención sea promover la argumentación. Diversas investigaciones en el campo de la enseñanza de la matemática tienen como objetivo contribuir tareas que fomenten la argumentación desde la refutación (Cervantes-Barraza & Cabañas-Sánchez, 2018). Ahora falta profundizar sobre cómo diseñar tareas con un objetivo doble, fomentar la argumentación y razonamientos algebraicos tempranos en estudiantes de primaria.

Referencias

Aké, L. (2013). Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación. España: Departamento de Didáctica de la Matemática - Universidad de Granada.

Archila, P. (2013). La Argumentación y sus aportes a la enseñanza bilingüe de las ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 10(3), 406-423. Recuperado de https://revistas.uca.es/index.php/eureka/article/view/2849

***Educación y Humanismo* 21(37): pp. 120- 138. Julio-Diciembre, 2019.** DOI: 10.17081/eduhum.21.37.3459

Bass, H. (2008). Matemáticos como educadores. *Educación y Humanismo*, 14(3), 189-194.

Benítez, A., Benítez P. & García, M. (2016). La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas. *Educación Matemática,* 28(3), 175-216.

Cabañas-Sánchez, G., Salazar, V. & Nolasco-Hesiquio, H. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En L. Aké y J. Cuevas Romo (Eds.). *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early Algebrization*. New York: Springer.

Carraher, D., Schliemann, D., Brizuela, M. & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 37(2), 87-115

Cervantes-Barraza, J., Cabañas-Sánchez, G. & Ordoñez-Cuastumal, S. (2017). El poder persuasivo de la refutación en argumentaciones colectivas. *Bolema, Rio Claro (SP),* 31(59), 861-879.

Cervantes-Barraza, J. & Cabañas-Sánchez, G. (2018). Argumentos formales y visuales en clase de geometría a nivel primaria. *Educación matemática,* 30(1), 163-183.

Cervantes-Barraza, J. A., Cabañas-Sánchez, G. & Reid, D. (2019). Complex argumentation in elementary school. PNA, 13(4), 221-246.

Common Core State Standards Initiative -CCSSI. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM).* Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Gamboa, G., Planas, N. & Edo, M. (2010). Argumentación matemática. Prácticas escritas e interpretaciones. *SUMA*, (64), 35-44.

Godino, J., Aké, L., M. Gonzato. & Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias,* 32(1), pp. 199-219.

Goizueta, M. & Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA,* 7(4), 155-170.

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C. & Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: McGRAW-HILL.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. & Simpson, A. (2007). *Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification*. New York: Springer Science + Business Media B.V.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. En National Council of Teachers of Mathematics (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum.* Washington, DC: National Academy Press.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age.

Knipping, C. & Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A Perspective on proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods*. Dordrecht: Springer.

Krummheuer, G. (1995). *The ethnography of argumentation.* New York & London: Routledge.

Martínez-Carazo, P. (2006). El método de estudio de caso: Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento & Gestión,* (20), 165-193.

Márquez, Z. (2012). La simulación como estrategia didáctica en el aprendizaje y la resolución de problemas lógicos. *Educación y Humanismo,* 14(22), 150-160.

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Recuperado de https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/

Pedreros, A. (2017). *Desarrollo de habilidades: aprender a pensar matemáticamente.* Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile.

Pereira, J., Bermúdez, E. & Mesa, J. (2016). Representaciones semióticas en el desarrollo del pensamiento algebraico. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa,* 1(1b), 62-63.

Ramírez, E., Fregoso. J., Calderón. C., Cueva. S., Martínez, R. & Sánchez, S. (2008). Errores algebraicos más comunes en los estudiantes de primer ingreso de las carreras de Informática, Administración y Turismo del Centro Universitario de los Valles de la

Educación y Humanismo 21(37): pp. 120- 138. Julio-Diciembre, 2019. DOI: 10.17081/eduhum.21.37.3459

Universidad de Guadalajara. *Revista Educación y Humanismo*, (14), 23-39.

Reyes, J. & Prieto, J. (2016). Interpretaciones de la fracción en una experiencia de simulación con GeoGebra. *Educación y Humanismo*, 18(30), 42-56. http://dx.doi.org/10.17081/eduhum.18.30.1321

Rivera, A. & Ruíz Vela, E. (2006). La habilidad argumentar y el adecuado desempeño del profesor. *EduSol*, 6(14), 1-12.

Rumsey, C., Guarino, J., Gildea, R., Cho. Y. & Lockhart, B. (2019). Tools to Support K-2 students in Mathematical Argumentation. *Teaching children mathematics,* 25(4), 208-217.

Schwaz, B., Neuman, Y. & Ilya, J. (2003).Construction of collective and individual knowledge in argumentative activity. *Journal of the learing sciences*, 12(2), 219-256

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. *Revista de Didactica de las Matemáticas*, (77), 5-34.

Solar, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación,* (74), 155-176.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument.* New York: Cambridge.

Valbuena, S., Conde, R. & Ortiz, J. (2018). La Investigación en educación matemática y Práctica Pedagógica, perspectiva de licenciados en Matemáticas en formación. *Educación y Humanismo*, 20(34), 201- 215. Doi: https://doi.org/10.17081/eduhum.20.34.2593

Valbuena, S., Padilla, I. & Rodríguez, E. (2018). El juego y la inteligencia lógico-matemática de estudiantes con capacidades excepcionales. *Educación y Humanismo*, 20(35), 166-183. DOI: https://doi.org/10.17081/eduhum.20.35.2964

Vergel, R. (2015). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? Uno - R*evista de Didáctica de las Matemáticas*, (68), 9 - 17.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá: DIE.

Vergel, R. (2018). *Tareas que suscitan actividades matemáticas en estudiantes de temprana edad*. Bogotá, Colombia: Ciclo de Conferencias en Educación Matemática GEMAD.