Educación y Humanismo 23(40): pp.1-25. Enero-Junio, 2021.
DOI: https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4221

EDUCACIÓN Y HUMANISMO

Descriptores para el concepto de parábola en el modelo de Van Hiele

Descriptors for the concept of parable in the Van Hiele model

William Eduardo Calderón-Gualdrón
Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología, Panamá
René Alejandro Londoño-Cano
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

Resumen

El presente artículo se deriva de una investigación a nivel doctoral en el campo de la educación matemática. **Objetivo:** Caracterizar los niveles de razonamiento delmodelo de Van Hiele asociados a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico por parte de estudiantes de décimo grado, haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra. **Método**: En una primera etapa de la investigación y a partir del análisis del modelo y de la literatura que aborda la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico con el uso de GeoGebra, se formulan descriptores preliminares para los niveles de pensamiento del modelo de Van Hiele, posteriormente se diseña una estrategia orientada por la entrevista socrática mediante la cual se refinan los descriptores para cada nivel. **Resultados:** En el presente artículo se presentan los descriptores que se detectaron en la etapa final de refinamiento de la entrevista socrática. **Discusión y Conclusiones**: Esta investigación valida el modelo de Van Hiele para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, mediado por el software de geometría dinámica.

Palabras clave: Descriptores, Entrevista socrática, GeoGebra, Parábola.

Abstract

This article is derived from a doctoral research in the field of mathematical education. **Objective:** to characterize the reasoning levels of the Van Hiele model associated with the understanding of the concept of parabola as a geometric place in tenth-grade students using GeoGebra dynamic geometry software. **Method:** In a first stage of the investigation and from the analysis of the model and of the literature that addresses the teaching of conics as a geometric place with the use of GeoGebra, preliminary descriptors are formulated for the levels of thinking of the Van Hiele model, Subsequently, a strategy oriented by the Socratic interview is designed through which the descriptors for each level are refined. **Results:** This article presentsthe descriptors that were detected in the final stage of refining the Socratic interview.**Discussion and Conclusions:** This research validates the Van Hiele model for the understanding of the concept of parabola as a geometric place, mediated by dynamicgeometry software.

Keywords: Descriptors, Socratic interview, GeoGebra, Parable.

Open Access:

ISSN: 0124-2121
E-ISSN: 2665-2420

Editora:
Dhayana Fernández

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

Correspondencia:
William Calderón
williameduardoc@hotmail.com

Recibido: 28-09-2020
Aceptado: 17-12-2020
En línea desde: 24-02-2020

Cómo citar este artículo (APA): Calderón-Gualdrón, W., y Londoño-Cano, R. (2021). Descriptores para el concepto de parábola en el modelo de Van Hiele. *Educación y Humanismo*, 23(40), 1-25. https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4221

Introducción

La Geometría Analítica hace parte de los contenidos que corresponden a la educación media del sistema educativo colombiano en el que regularmente se encuentran estudiantes entre los 15 y 16 años en el grado 10°. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) hacen referencia a que, en relación a las cónicas, los estudiantes deberán:

> (i) identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono; (ii) identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y, en particular, de las curvas y figuras cónicas; (iii) usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias; y, (iv) reconocer y describir curvas y/o lugares geométricos. (MEN, 2006, p.88)

La revisión de la literatura permite observar cómo, en su gran mayoría, los estudiantes de la educación media y de primeros años universitarios, conservan habilidades de tipo algebraico que les permiten determinar las ecuaciones de las secciones cónicas o determinar sus elementos, pero no exploran ni comprenden los conceptos que van ligados a ellas como lugares geométricos, cuestión que ha sido documentada por Santa y Jaramillo (2013), y Cruz y Mariño (1999).

Just y Carpenter (1985) reportan que estudiantes que terminan la educación media identifican las figuras cónicas en un contexto usual, enunciándolas o visualizando un esquema a nivel gráfico, pero al requerir realizar algunas de sus representaciones o mencionar las características, propiedades o aplicaciones, hay evidentes diferencias en su comprensión e interpretación; lo mismo ocurre cuando se pide reconocer la aplicación de sus propiedades y los elementos que las componen. Así mismo, Cruz y Mariño (1999) aseveran que: "dentro del estudio de la geometría analítica, se han presentado dificultades en la comprensión de los contenidos relativos a las secciones cónicas" (p.15).

Los estudios revisados evidencian la necesidad de llevar a cabo procesos donde el estudiante llegue a una comprensión más asertiva de los conceptos necesarios en matemáticas. En esta investigación, en particular, interesa aportar a la solución de las dificultades en la comprensión de la parábola como lugar geométrico en estudiantes de educación media.

En relación con lo anterior, el problema de la comprensión en conexión con el aprendizaje de la geometría ha sido abordado desde antaño por Van Hiele (1957), quien resalta su importancia al afirmar que "la adquisición de comprensión es, con razón, uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas" (p. 10). Los esposos Van Hiele crearon un modelo en el cual resaltan, además de unas fases del aprendizaje en geometría, la existencia de unos niveles de razonamiento que indican, a diferencia de Piaget, que los estudiantes no tienen el mismo nivel de pensamiento en cualquier edad observable, pues "cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento” (Jurado y Londoño, 2005, p. 7).

Así, la evolución del razonamiento geométrico de los individuos puede pasar por etapas de distinta calidad que los Van Hiele organizan en cinco niveles: (i) predescriptivo; (ii) de reconocimiento visual; (iii) de análisis; (iv) de clasificación y relación; y, (v) de deducción formal. Estos niveles son consecutivos y, además, no se puede alcanzar a un nivel sin superar los anteriores. La finura del modelo es tal que cuenta con unas características específicas para cada uno de los niveles de razonamiento en relación a un concepto matemático, los cuales dan cuenta de la forma como progresa el razonamiento de los estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 1990).

El modelo de Van Hiele (1957) señala que se deben crear las condiciones bajo las cuales la comprensión se pueda dar, lo cual conduce a pensar que es, quizás, por la forma tradicional que se enseña, lo que conlleva a que los estudiantes presenten dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos.

En ese sentido, Bartolini (2005) señala que no es posible comprender las definiciones de las secciones cónicas si las analizamos a través de un único camino, como por ejemplo, el más utilizado, el algebraico. El motivo de ello es que no es suficiente con estudiar los aspectos analíticos debido a que esto genera, que una gran cantidad de significados se pierda con solo este camino. Fiallo (2011) en una investigación llevada a cabo con más de 100 estudiantes, demostró que trabajando con un software de geometría dinámica (SGD) se pueden conectar las diferentes representaciones aritméticas, geométricas, algebraicas y analíticas de los objetos geométricos, mejorando la comprensión y generando la transición de lo numérico hacia lo analítico y de lo empírico hacia lo deductivo, apoyadas en la visualización y análisis de las características geométricas y analíticas, producto de la exploración (Fiallo, 2011).

Al incorporar un SGD como GeoGebra en la unidad de enseñanza, se busca favorecer la comprensión de la parábola como lugar geométrico, aspecto que se evidencia en el logro de los descriptores de cada nivel. Esa comprensión no se alcanza al azar sino con la orientación de la entrevista socrática, la cual es el eje transversal de la estrategia cuyo propósito es avanzar en la comprensión sobre el objeto matemático, para lo cual el estudiante debe reflexionar no sólo acerca de las preguntas que se le formulan, sino también, acerca de sus propias respuestas, y que llegue a hacer conciencia de las relaciones y propiedades que utiliza en sus razonamientos (De la Torre, 2003, p. 116).

Para efectos de esta investigación, se tomaron en cuenta los aspectos que Van Hiele considera son importantes tener presentes en una sesión en la que se trabaje con el método socrático, los cuales son, según De la Torre (2003):

> El maestro tiene que asegurarse del interés de los estudiantes en el problema y debe captar su atención desde el comienzo.

> El método socrático sólo es efectivo en tanto que se pueda garantizar que cada uno de los estudiantes alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente. El trabajo de los estudiantes debe ser individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se les permita avanzar también a los estudiantes que se muevan a paso lento. El maestro debe calibrar acertadamente la dificultad del problema, de modo que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto. (p.103)

El modelo de Van Hiele (1986) enfatiza en estas premisas, pues "es posible emplear el método socrático, con muy buenos resultados, pero también es muy fácil fracasar en el intento" (Jurado y Londoño, 2005, p. 27). De esta manera, la investigación propone el diseño de una entrevista socrática como estrategia que contribuye a la enseñanza de las secciones cónicas, en particular de la parábola, con la mediación de un software de geometría dinámica (SGD), lo cual responde a la pregunta de investigación: *¿Cómo comprenden el concepto de parábola como lugar geométrico los estudiantes de últimos años de educación media, implementando la entrevista socrática mediada por un software de geometría dinámica?*

En este estudio se da a conocer, por un lado, el diseño y consolidación de los descriptores para los niveles de razonamiento asociados a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico y, por otro, algunos resultados que logra evidenciar la entrevista socrática como estrategia para alcanzar el objetivo de la investigación.

Fundamentación Teórica

Partiendo de lo expuesto, es importante abordar sucintamente los referentes teóricos alrededor de la enseñanza de la parábola, evidenciando la influencia del modelo de Van Hiele, la Entrevista Socrática y el uso de GeoGebra (SGD empleado en este estudio) en la enseñanza de la Geometría Analítica, elementos teóricos de la investigación que se articulan para dar respuesta a la pregunta de investigación.

Dificultades en la enseñanza y aprendizaje del concepto de parábola.

Actualmente se han documentado diversas evidencias que muestran que los estudiantes a nivel de educación media y universitaria poseen dificultades en la comprensión de las cónicas. En el caso particular de la parábola, se puede notar que desarrollan un trabajo algorítmico apoyado en un proceso netamente algebraico y memorístico, dejando de lado lo analítico del concepto. Así lo señalan Santa y Jaramillo (2007), quienes hacen referencia al desconocimiento de los componentes que integran la parábola por parte de los estudiantes, lo que conlleva a que no puedan relacionar sus elementos de manera analítica. Respecto al primer encuentro que se suele dar entre los estudiantes y la noción de lugar geométrico a través de contextos algebraicos, Gaita y Ortega (2014) señalan que este es negativo, ya que:

> Ocasiona que los estudiantes se dediquen a realizar cálculos y no logren

> identificar dos elementos fundamentales del concepto: la dependencia entre cada punto generado y la condición geométrica dada, así como la necesidad de dar como respuesta todos los elementos del conjunto (p.1135)

Otras dificultades asociadas a la comprensión en el aprendizaje de la parábola están vinculadas con las diversas formas de representación propias de los estudiantes con respecto a la temática, así lo afirman Gaitán, Lacayo y Flores (2014) al realizar un estudio sobre la comprensión de este objeto matemático con estudiantes de undécimo grado. Otro hallazgo importante que reportan los autores es que los profesores emplean pocas estrategias de enseñanza de las cónicas en su sentido analítico.

Según lo anterior, la existencia de dificultades en torno a de la comprensión de la parábola como lugar geométrico podría ser resultado de la forma como se enseña. Lara (2016) en su estudio con profesores de matemáticas, encuentra que algunos profesores "no tienen clara la noción de la parábola como lugar geométrico, ellos piensan que la representación de la función cuadrática es una parábola pues la representación es similar a la representación de la parábola como lugar geométrico, ellos confunden la representación con el objeto" (pp. 136-137).

Las dificultades que los profesores de matemáticas tienen sobre los objetos matemáticos limitan la enseñanza que realizan, en este sentido Van Hiele (1986) afirma:

> Obviamente los estudiantes, por si solos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz (en cuanto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén dirigidas hacia los conceptos y propiedades que deben estudiar (p. 334)

Los resultados anteriores fueron pertinentes para este estudio, por cuanto dan cuenta de algunas de las dificultades que han sido reportadas en relación tanto a la enseñanza como al aprendizaje de la parábola como lugar geométrico, lo cual enfatiza la necesidad de crear ambientes en los cuales se propenda por la comprensión, pese a que lo común sean los métodos para calcular y los algoritmos.

El modelo de Van Hiele

Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof, como profesores del área de matemáticas, idearon una forma que consiguiera aumentar el nivel de razonamiento de los estudiantes en geometría, pues a partir de sus observaciones y reflexiones en el aula, notaron que, a diferencia de Piaget, los estudiantes no tienen el mismo nivel de pensamiento en cualquier edad; para ellos "cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento" (Jurado y Londoño, 2005, p. 7).

Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de Van Hiele es:

> Una excelente guía para los profesores pues (…) enseña a descubrir cómo debe comunicarse el profesor con los estudiantes, para presentarles nuevos conceptos de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas, su aprendizaje y el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los estudiantes. (pp. 302-303)

Este aspecto positivo del modelo, que es resaltado por los autores, motiva el interés de esta investigación, ya que, precisamente, se quiere fomentar la comprensión de los estudiantes, en este caso, en el aprendizaje del concepto de parábola. Van Hiele (1957) se refiere a la comprensión así:

> Se dice que un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes. El niño suele ir averiguando su adquisición de comprensión de la siguiente manera: "Ah, ya lo veo, o sea que si…" y acontinuación formula un nuevo teorema. Lo característico de la comprensión es pues que se van tanteando nuevas situaciones. (p. 4)

El modelo de Van Hiele está formado por tres aspectos:

a. Niveles de razonamiento: los cuales referencian una secuencia continua de tipos de razonamientos mediante los cuales progresa, sin saltarse alguno, y exhiben la capacidad de razonamiento matemático de los individuos, desde que empiezan su aprendizaje hasta que alcanzan su máximo grado de desarrollo.

b. Fases de aprendizaje: orientadas a los profesores o investigadores, las cuales brindan directrices para encaminar a sus estudiantes hacia un nivel superior de razonamiento.

c. Percepción-*insight*, que de acuerdo con Moreno (2017), resulta del discernimiento de una determinada estructura en los términos de Van Hiele, por lo que su desarrollo proviene de la capacidad de los estudiantes para ver las estructuras como un todo.

Las características centrales del modelo de acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990) son las siguientes:

1. Se pueden hallar varios niveles en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas (para conceptos distintos).
2. Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

4. No se puede enseñar a un estudiante a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que adquiera la experiencia necesaria para llegar a razonar de esa forma. (p.305)

Los niveles de razonamiento son características intelectuales y cognitivas que se pueden describir cuando observamos el desarrollo intelectual y cognitivo por el cual debe atravesar todo estudiante, lo cual permite describir su nivel de razonamiento y comprensión en el tema que se desee estudiar. Es decir, los niveles permiten conocer el avance de un estudiante en la comprensión en cuanto a un concepto matemático.

En un primer momento, los Van Hiele enumeran cuatro niveles diferentes, enunciados de la siguiente manera: primer nivel, segundo nivel, tercer nivel y cuarto nivel. Antezana, Cayllahua, Yalli & Rojas, (2020), y Sarrín, (2019) trabajan sus investigaciones basados en la clasificación que propone Jaime y Gutiérrez, (1990), quienes van un poco más allá y le dan un nombre específico a cada nivel: nivel 1 (de reconocimiento), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación) y nivel 4 (de deducción formal). Land, (1991) realiza una clasificación similar: Habla de nivel 0 (básico, visual o predescriptivo), nivel I (descriptivo), nivel II (teórico) y nivel III (deductivo). Por su parte, Moreno, A. (2017) y Venegas, (2015) utilizan los siguientes nombres para los cinco niveles de razonamiento: Visualización, Descripción o análisis, Deducción informal u ordenación, Deducción formal y Rigor. Por último, Esteban y Llorens (2003) usan la siguiente nomenclatura: "Nivel 0, predescriptivo, Nivel I, de reconocimiento visual, Nivel II, de análisis, Nivel III, de clasificación, y Nivel IV, de deducción formal" (p.42). En este estudio se utiliza la nomenclatura de Esteban y Llorens (2003).

De otra parte, para que una clasificación en niveles pueda considerarse dentro del modelo de Van Hiele, es necesario que presente ciertas características específicas, las cuales se enuncian a continuación:

1. Cada estudiante debe progresar a través de los niveles en una secuencialidad fija (propiedad de secuencialidad fija).
2. El objeto de percepción del nivel n-1 se convierte en el objeto de pensamiento del nivel n (propiedad de adyacencia).
3. El nivel n requiere de una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel n-1, esto es, la percepción de una nueva estructura (propiedad de distinción).
4. Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático (propiedad de separación).
5. Cada nivel tiene un tipo de lenguaje específico, por lo que las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada uno de los niveles se reflejan tanto en las formas de resolver problemas como en la forma de expresarse y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico (propiedad "cada nivel tiene su lenguaje").

> 6. El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual; es decir, sólo se puede considerar adquirido un nivel cuando se manifiestan cada una de sus cualidades (propiedad de consecución). (Londoño, Jaramillo y Esteban, 2017, p.125)

De acuerdo con Jara, (2015) si los estudiantes están en un nivel "n" de razonamiento y se les representa una situación problema que requiere un vocabulario particular, unos conceptos unos conocimientos y un razonamiento de nivel "n+1", no serán capaces de progresar en la solución de la situación problema planteada y, por tanto, se produce el fracaso en su enseñanza.

En este sentido, el modelo de Van Hiele resulta pertinente en este estudio pues permite describir de manera secuencial la comprensión del concepto geométrico "parábola" como lugar geométrico ya que, además, el lenguaje se convierte en un aspecto determinante para la caracterización del nivel de razonamiento.

La interacción en el aula y el papel del docente son dos aspectos fundamentales en el modelo de Van Hiele, por ello, se establecen cinco fases del aprendizaje que contribuyen a que los estudiantes avancen en los niveles de razonamiento: (1) Información, (2) Orientación dirigida, (3) Explicitación, (4) Orientación Libre, (5) Integración. La organización de las fases de aprendizaje y las particularidades propias de cada una se asocian perfectamente con los elementos didácticos del aprendizaje por descubrimiento, en sus más recientes manifestaciones.

La entrevista socrática

El método socrático ha ganado un importante lugar en la educación matemática y diversas investigaciones dan cuenta de su importancia, Llorens (1994), Jaramillo (2000), Campillo (1999), De la Torre (2000), Esteban (2000), Santa (2011), Navarro (2002), y Prat (2015), gracias a que facilita el ambiente para construir conocimiento bajo una característica especial: el profesor, quien dirige el diálogo, asume una actitud de humildad que permite a los estudiantes sentirse cómodos en un nivel en el cual pueden participar abiertamente; en vez de decir qué o cómo hay que pensar, permite el descubrimiento del conocimiento por parte del estudiante.

Sucerquia, Londoño y Jaramillo (2013) señalan que en una clase de matemáticas el diálogo debe permitir la expresión de ideas, conocimientos, razonamiento crítico y reflexivo, procesos argumentativos, etc.; es decir, el diálogo matemático debe presentar algunas características particulares que deben estar en correspondencia con las propias del diálogo socrático.

> La entrevista socrática ha sido el medio más adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del alumno, como también se ha considerado una herramienta fundamental en estos estudios, debido a que ha permitido determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de Van Hiele. (Jaramillo y Campillo, 2001, p. 82).

Santa y Jaramillo (2014) analizan y caracterizan el proceso de comprensión de cinco estudiantes de una institución educativa pública colombiana, en relación al concepto de elipse como lugar geométrico, mediante el doblado de papel. Este estudio se fundamentó en la entrevista socrática, por lo que crearon entrevistas individuales para analizar el proceso de comprensión de Rosi (caso de estudio) de acuerdo con los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en relación con el concepto de elipse como lugar geométrico. Algunas características de la entrevista individual estructurada hecha a la estudiante fueron:

- El lenguaje, ya que este es fundamental porque permite al entrevistador descubrir su nivel de razonamiento
- El pensamiento discursivo, pues en la entrevista se diseñaron preguntas que permitieran sacar conclusiones a partir de un sistema de enlaces lógicos entre los conceptos.
- La problematización con las ideas, es decir, algunas preguntas de la entrevista provocaron que Rosi ingresara en un estado de contradicción interna o de confrontación con las ideas que ya tenía y las nuevas que le llegan, esto para contribuir a que ella pasara de un nivel a otro.
- El paso por los tres momentos: creer saber la respuesta, darse cuenta que no sabe y, por último, entrar en un conflicto interno que despierta la necesidad de encontrar la verdad.
- La red de relaciones: las preguntas se diseñaron de tal modo que el estudiante pudiera construir una red de relaciones alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, a través de la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel y los conceptos concretos de mediatriz y de circunferencia.

Dado que este estudio planteó por objetivo estudiar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico de estudiantes de últimos años de educación media, implementando la entrevista socrática mediada por un software de geometría dinámica, se conjeturaron unos descriptores preliminares para cada nivel de razonamiento, derivados de la reflexión teórica en desarrollo, y que fueron validados por expertos. La entrevista socrática es usada tanto para demostrar los descriptores preliminares como para ajustarlos a las exigencias del modelo, por cuanto se convierte en una experiencia de aprendizaje, ayudando a refinar los mismos descriptores.

GeoGebra

Peña (2010) resalta que los software de geometría dinámica (SGD) contribuyen con nuevas posibilidades en la enseñanza de la geometría ya que se supera el carácter estático de las figuras en el papel; los SGD dotan de movimiento a las figuras, cualidad que permite analizarlas desde diferentes perspectivas y comprender los conceptos y propiedades asociadas a ellas, empleando las opciones de arrastre de los programas. La autora señala que "la utilización de los programas de Geometría Dinámica en clase nos ayudará a acercar los contenidos matemáticos a los estudiantes y mejorar su comprensión" (Peña, 2010, p. 166).

Aunque Van Hiele no trabajó con un software de geometría dinámica, y el modelo aún no ha sido validado utilizando esta herramienta, algunos estudios como los de Gaita y Ortega (2014) y Lara (2016) trazan una ruta de trabajo desde la cual se puede contribuir a la comprensión del objeto matemático que aquí interesa, usando el software de geometría dinámica GeoGebra como mediador para su enseñanza. El uso del software implica el diseño de actividades matemáticas que incorporen el *software* con tareas que conduzcan a este propósito pues "el profesor puede, mediante una selección apropiada de tareas, crear una situación ideal para que el alumno alcance un nivel de pensamiento superior" (Van Hiele, 1957, p. 91).

Peña (2010) señala que "los programas de Geometría Dinámica son útiles para que el alumno descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas" (p. 4). Este aspecto ha sido incorporado en investigaciones como las de Fiallo (2000) quien, además, señala que un software especializado para las matemáticas y su enseñanza por sí sólo no enseña, "se requiere de un modelo que permita, además de conocer cómo el estudiante aprende a razonar en geometría, organizar nuestro trabajo en el aula con el uso de la tecnología para que éste llegue a adquirir un nivel superior de razonamiento" (p. 1).

Es así como Fiallo (2011) en su tesis doctoral mediante el diseño de una unidad de enseñanza de trigonometría, y el software de geometría dinámica (SGD) Cabri Geometre como herramienta didáctica, se ocupa de la parte prescriptiva del modelo; "El SGD proporcionó herramientas a los estudiantes para explorar y experimentar con objetos y relaciones geométricas y numéricas. También favoreció la interacción entre explorar y demostrar, entre hacer sobre el ordenador y justificar por medio de argumentos teóricos" (Fiallo, 2011, p. 256). El investigador atravesando las cinco fases de aprendizaje logra que los estudiantes lleguen a demostrar identidades trigonométricas. El autor concluye que el software de geometría dinámica (SGD) Cabri Geometre, motiva a los estudiantes a saber por qué son verdaderos los conceptos y propiedades estudiadas ya que, además, les proporciona conocimientos necesarios para que formulen razonamientos y demostraciones sobre ellos.

Los investigadores López, Aldana y Arboleda (2013) también emplearon GeoGebra en un estudio con 25 estudiantes (cuyas edades oscilan entre 17 y 30 años) de Ingeniería de Sistemas de primer semestre para conocer cómo ellos adquieren la comprensión del concepto de parábola, mediante geometría dinámica y la Ingeniería Didáctica de Chevallard como soporte teórico. Entre las conclusiones reportadas, destacan que las tecnologías digitales logran una mayor comprensión del objeto matemático, en los siguientes términos:

> […] el medio informático como herramienta facilitó en los estudiantes la comprensión de los elementos que caracterizan la ecuación canónica de la parábola con centro en el origen y fuera de este; establecieron relaciones entre los elementos matemáticos y los modos de representación gráfico, algebraico y analítico, y lograron una construcción progresiva, ascendente, consciente y real del objeto matemático de estudio (López, Aldana y Arboleda, 2013).

En lo actitudinal, los autores reportan que los estudiantes están más receptivos y animados al desarrollo de las actividades; durante la actividad matemática, ellos formulan hipótesis y conjeturas, utilizan un lenguaje matemático adecuado, entre otras. Todos estos aspectospositivos motivan el uso de GeoGebra como mediador en el proceso de enseñanza conducente ala comprensión de la parábola como lugar geométrico.

Método

Teniendo como horizonte la pregunta de investigación y objetivo a cumplir, se eligió para la investigación un enfoque cualitativo ya que se quiere conocer a profundidad cómo avanzan los estudiantes en los niveles de comprensión desde un punto de vista descriptivo. Esto, además, conduce a que el método empleado sea el *estudio de casos,* pues se hace un examen exhaustivo y profundo de su comprensión sobre el objeto matemático en construcción, lo cual exige un proceso de indagación sistemático.

El proceso metodológico de esta investigación se da mediante las siguientes fases:

Fase 1: *Exploración del software GeoGebra.*

En esta fase se eligieron 33 estudiantes del grupo 10°1 de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander que fueron llevados a la sala de informática para conocer e interactuar con el software de geometría dinámica GeoGebra. De forma inmediata se pudo evidenciar en los estudiantes el gusto por el software, y de ellos, 23 presentaron habilidad para realizar algunas construcciones sencillas. Con esta actividad se pretendía que los estudiantes mostraran algunos conocimientos previos relacionados con la geometría euclidiana y con el manejo del software GeoGebra.

Fase 2: *Diseño de actividades en GeoGebra y la entrevista socrática.*

En esta fase se realizó el refinamiento de la entrevista socrática con 18 de los 23 estudiantes divididos en grupos de 6; se inicia con el primer guion preliminar de entrevista el cual se aplicó al primer grupo de 6 estudiantes que mostraron habilidad para trabajar con el software, permitiendo evidenciar que algunas preguntas no eran pertinentes y hacían falta otras. Realizando las modificaciones se crea un nuevo guion, el cual es aplicado al segundo grupo de 6de los 23 estudiantes mencionados anteriormente, consiguiendo un guion más asertivo a nuestropropósito, pero que aún evidenciaba falencias en algunas preguntas, por lo que se ajustó y aplicóde nuevo al tercer grupo de 6 de los 23 estudiantes. El refinamiento de las preguntas y las actividades desarrolladas mediante el *software* GeoGebra, además de las observaciones hechasen clase y las entrevistas individuales y grupales, permitió obtener el guion final de entrevista mediante el cual se obtuvieron los descriptores finales de los niveles de razonamiento. Esto condujo a analizar el proceso de comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico con la mediación del SGD, de acuerdo a los descriptores creados para los diferentes niveles.

Fase 3: *Elección del caso de estudio*

Finalmente, la investigación, en esta etapa, se centró en el análisis del proceso de comprensión de 5 de los 23 estudiantes (pues con los 18 estudiantes restantes se llevó a cabo el proceso de refinamiento de la fase 2) sobre el concepto de parábola como lugar geométrico; para lograr este objetivo se diseñaron, de manera a priori, algunos descriptores de los niveles de razonamiento triangulando tres fuentes principales de información: actividades desarrolladas mediante el software, la entrevista socrática refinada y las observaciones hechas en clase.

Resultados

Seguidamente, presentamos los descriptores de nivel (**DN**) que surgieron después del refinamiento de aquellos que se crearon a priori.

Nivel 0: Predescriptivo

En este nivel se identifican los saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión de parábola como lugar geométrico. Los descriptores para este nivel son estrictamente conceptuales sin requerir el uso del software. El estudiante ubicado en este nivel:

DN 0.1 Reconoce objetos geométricos que no son definibles como punto, recta y plano.

DN 0.2 Reconoce que por dos puntos pasa una única recta.

DN 0.3 Identifica la distancia más corta entre dos puntos como la medida del segmento de recta que los une.

Nivel I: Reconocimiento visual

En este nivel el estudiante construye y visualiza, en un ambiente de geometría dinámica, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras. El estudiante ubicado en este nivel:

DN 1.1 Reconoce algunos objetos geométricos básicos, que se muestran en un ambiente de GeoGebra tales como: punto, punto de intersección, segmento, medida de un segmento, medida de un ángulo, rectas, rectas perpendiculares y paralelas, entre otras.

DN 1.2 En el ambiente de GeoGebra ubica puntos y puntos de intersección, traza un segmento, traza rectas, traza rectas perpendiculares, traza rectas paralelas, determina puntos de intersección entre rectas y segmentos, entre otras

DN 1.3 En el ambiente de GeoGebra determina la condición para hallar la distancia más corta de un punto a una recta.

DN 1.4 En un ambiente de GeoGebra halla la distancia más corta entre un punto y una recta

DN 1.5 En un ambiente de GeoGebra determina las condiciones bajo las cuales dos rectas son paralelas o perpendiculares.

Nivel II: De análisis

En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta fija llamada D. El estudiante ubicado en este nivel:

DN 2.1 En un ambiente de GeoGebra, halla la distancia entre cada uno de los puntos de un conjunto dado y un punto fijo, y entre los primeros y una recta fija.

DN 2.2 En un ambiente de GeoGebra halla el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo.

DN 2.3 En un ambiente de GeoGebra, encuentra el conjunto de puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos

DN 2.4 En un ambiente de GeoGebra, dada una serie de puntos identifica que equidistan de un punto F y de una recta llamada D.

DN 2.5 En un ambiente de GeoGebra, ubica algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo y una recta fija.

DN 2.6 En un ambiente de GeoGebra, reconoce que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola, sin mencionar las propiedades que la caracterizan.

Nivel III: De clasificación

En este nivel, el estudiante establece la condición que debe verificar un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola, además, logra dar una definición de la misma como lugar geométrico.

DN 3.1 Muestra la necesidad de definir formalmente la parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija L llamada directriz.

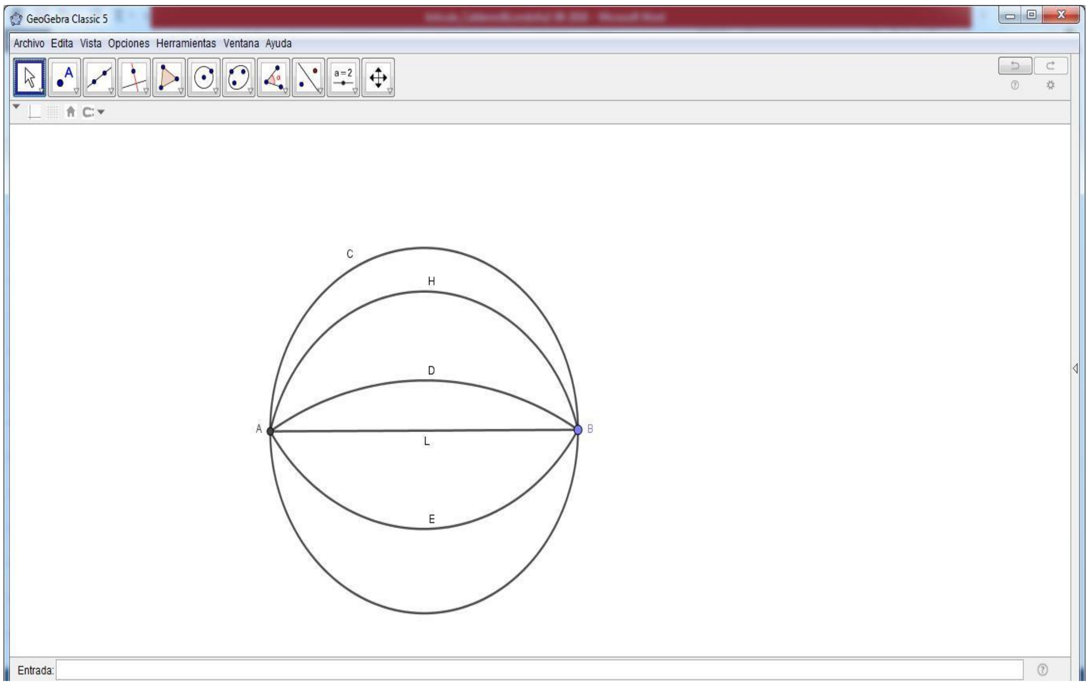
A continuación, se muestran algunos ejemplos de las preguntas que hacen parte de la entrevista socrática semiestructurada, de las respuestas dadas por los 5 estudiantes a cada pregunta exhibida y la evidencia de la respuesta dada por uno de ellos en el ambiente de Geogebra.

Pregunta para el nivel 0 (PN 0): Predescriptivo

PN 0. En la siguiente gráfica, ¿cuál es el camino más corto para ir de A hasta B? ¿Por qué?

Con esta pregunta se pretende analizar si el estudiante identifica la distancia más corta entre dos puntos como la medida del segmento de recta que los une.

Figura 1.
PN 0



Fuente: elaboración propia.

Respuestas dadas por los estudiantes:

E1. El camino más corto entre A y B es el segmento AB, o sea, el camino L, los medí con la herramienta distancia o longitud, y el más corto es L.

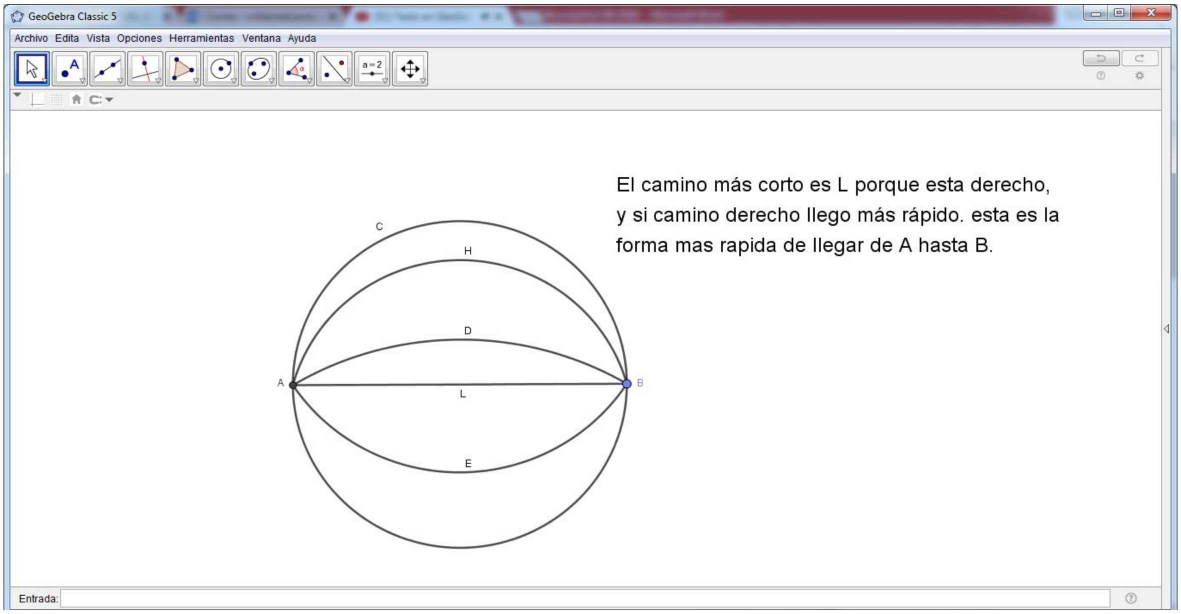
E2. El año pasado vimos que la distancia más corta entre dos puntos es una recta, así que debe ser el segmento AB ósea el camino L, con el software lo comprobé.

E3. El camino más corto es L, porque está derecho, y si camino derecho llego más rápido. Esta es la forma más rápida de llegar de A hasta B.

E4. Utilizando la herramienta distancia o longitud del software el valor menor es el camino L y el mayor AF.

E5. La distancia más corta entre dos puntos, es el segmento de recta que los une, con el software lo comprobé y el camino más corto es L.

Figura 2.
Evidencia de la respuesta del estudiante E3 en PN 0



Fuente: elaboración propia.

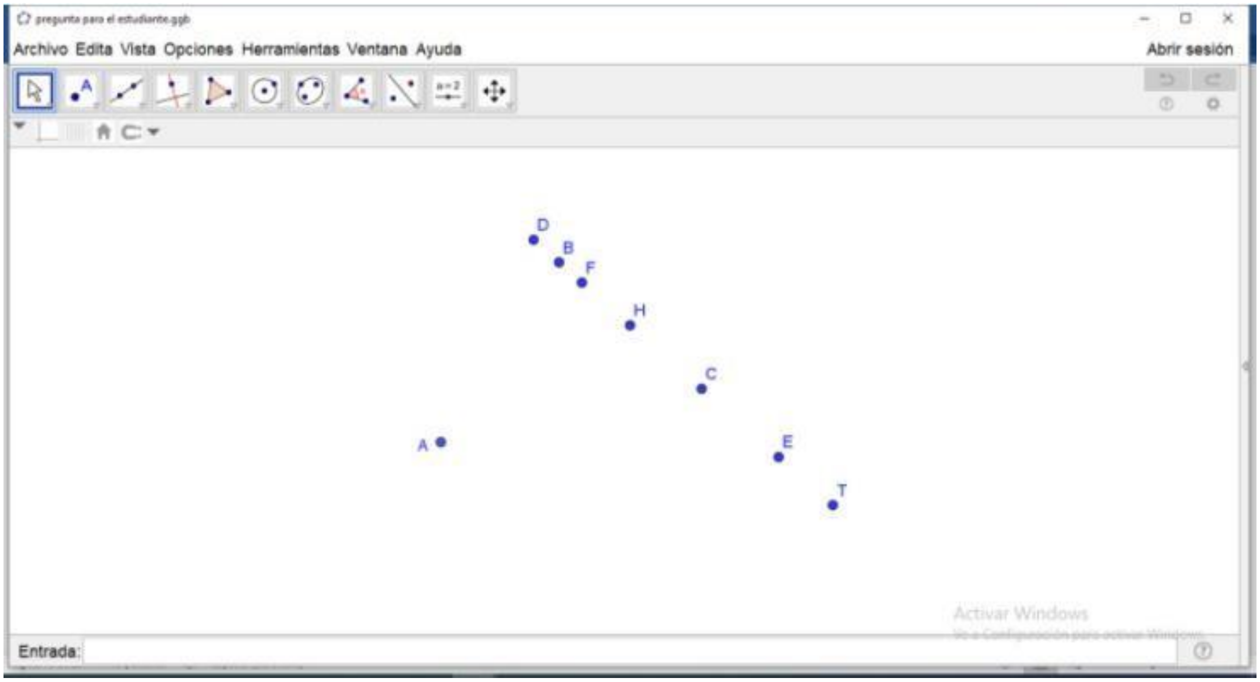
En la figura 2 se evidencia a manera de ejemplo, cómo el estudiante E3 tiene claro que la distancia más corta entre dos puntos es la media del segmento que los une, lo que permite detectar DN 0.3, teniendo presente además, las respuestas de los demás estudiantes.

Pregunta para el nivel I (PN 1): Reconocimiento visual

PN 1. En la pantalla de GeoGebra se muestran varios puntos colineales y el punto A. ¿Cuál de los puntos colineales se encuentra más cerca del punto A? ¿Por qué?

Con esta pregunta se pretende que en el ambiente de GeoGebra el estudiante pueda inferir algunas condiciones para hallar la distancia más corta de un punto a una recta.

Figura 3.
PN 1



Fuente: elaboración propia.

Respuestas dadas por los estudiantes:

E1. Con el software fue muy fácil medir todas las distancias, de estas la más corta fue A con 4,63, entonces el punto más cercano es F.

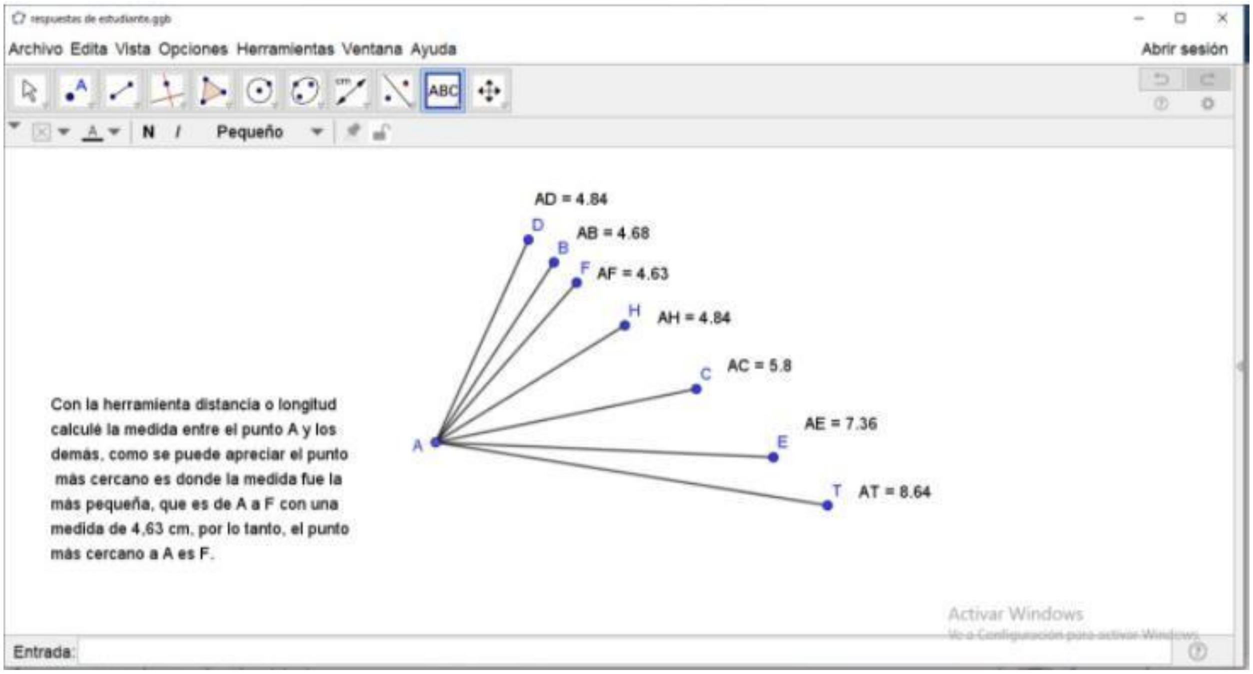
E2. El más cercano es F, con la herramienta distancia o longitud del software medí todas las distancias de los puntos al punto F, la distancia más corta es 4,63 de donde F es el punto a menor distancia de A.

E3. Con la herramienta distancia o longitud calculé la medida entre el punto A y los demás, como se puede apreciar el punto más cercano es donde la medida fue la más pequeña, que es de A a F con una medida de 4,63 cm, por lo tanto, el punto más cercano a A es F.

E4. El punto más cercano a A es F, porque si trazo una perpendicular que pase por A con los puntos colineales corta al punto E.

E5. Es F, porque trazamos la recta que pasa por todos los puntos y ahora con la herramienta perpendicular trazamos la perpendicular a esta recta construida y que pase por A, cortando a la recta construida en el punto más cercano que es E, además lo verifiqué con la herramienta distancia o longitud.

Figura 4.
Evidencia de la respuesta del estudiante E3 en PN 1



Fuente: elaboración propia.

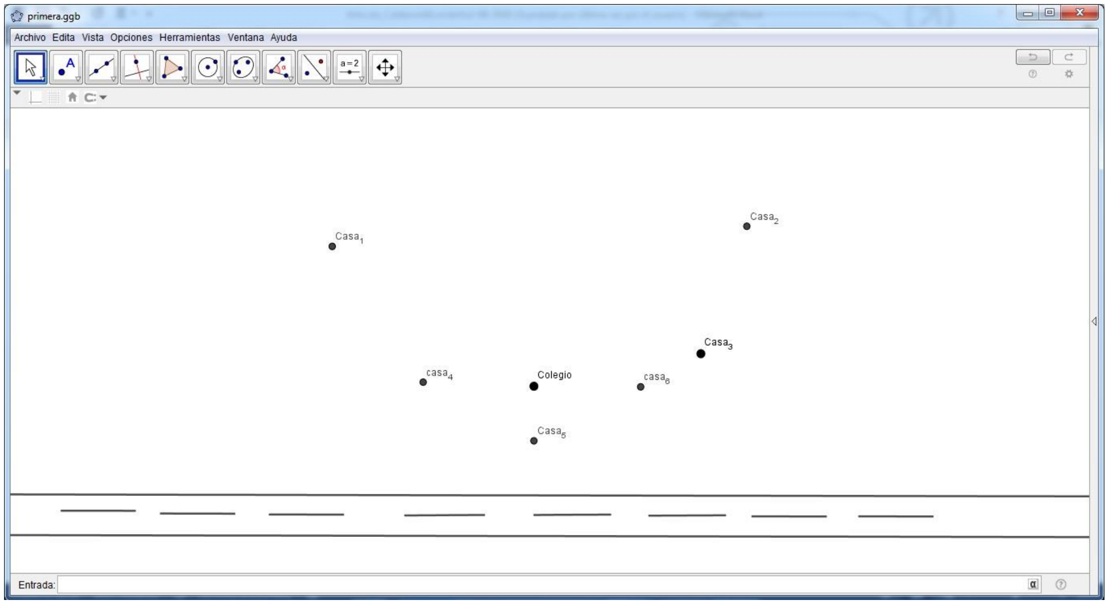
En la figura 4 se evidencia a manera de ejemplo, cómo el estudiante E3 calcula medidas con las herramientas del ambiente Geogebra y tiene claro que la distancia más corta entre dos puntos es la media del segmento que los une, lo que permite detectar DN 1.3 y DN 1.4, teniendo presente además, las respuestas de los demás estudiantes.

Pregunta para el nivel II (PN 2): De análisis

PN 2. En un pueblo las casas construidas deben satisfacer la condición de que la distancia que hay de ellas al colegio debe ser la misma que de ellas a la carretera. En el siguiente gráfico, ¿cuál o cuáles casas no cumplen con la condición? ¿Podrías ubicar otros puntos con estas características? ¿cuántos puntos crees que existen y cumplen esta propiedad?

Con esta pregunta se pretende que, en un ambiente de GeoGebra, el estudiante reconozca puntos que equidistan de un punto fijo llamado F y una recta fija llamada D, para que posteriormente, halle algunos puntos que cumplan la condición.

Figura 5.
PN 2



Fuente: elaboración propia.

Respuestas dadas por los estudiantes:

E1. Lo primero que hice fue tomar la medida de cada casa a la carretera con el software y luego al colegio y ver cuáles resultados eran iguales, observando que la casa que no cumple la condición es la casa 3. Creo que debe haber muchos puntos con esta característica.

E2. La casa 3, no cumple la condición. Con la herramienta distancia o longitud se puede calcular la distancia de todos los puntos a la recta de la carretera, igualmente la distancia de los puntos con el punto que representa el colegio, y el punto 3, presenta valores diferentes. Debe haber muchísimos puntos con esta característica siguiendo una especie de patrón con un punto mínimo y subiendo para ambos lados.

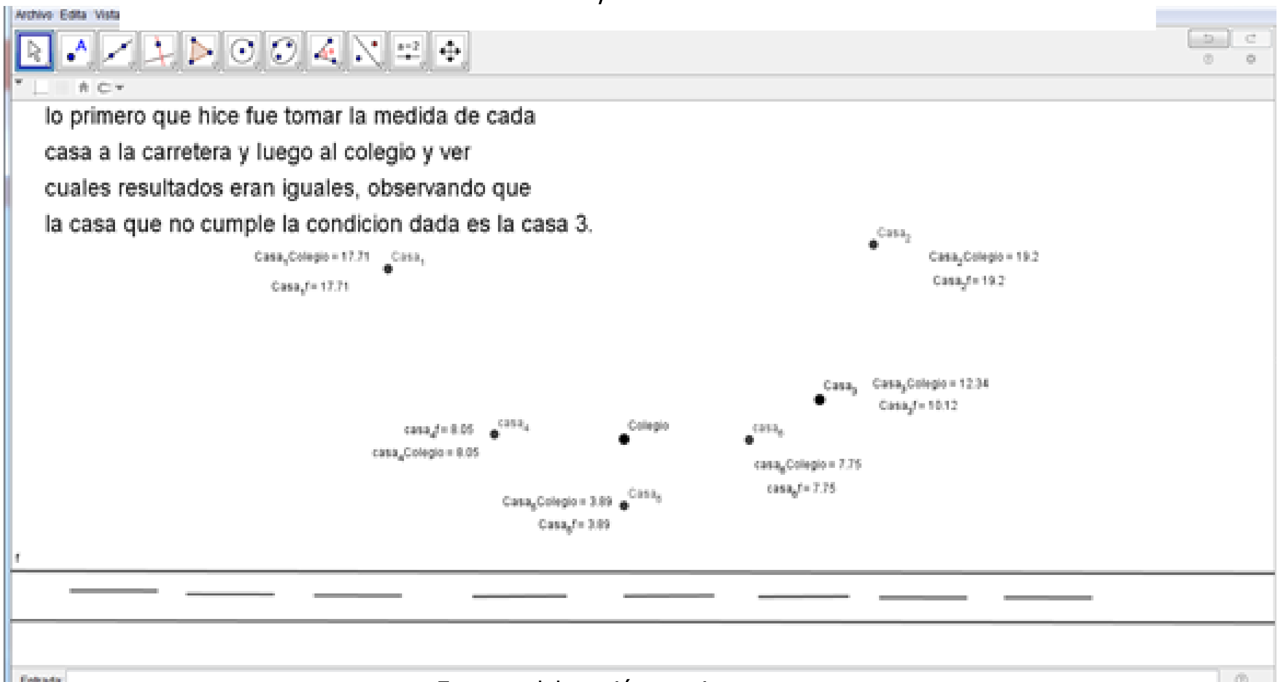
E3. La casa 3 no cumple, forme triángulos con los puntos y la carretera, el único triángulo que no fue isósceles fue el formado por el punto de la casa 3, creo que hay infinitos puntos que formen triángulos isósceles.

E4. La casa 3 es la única que no cumple la condición, para verificarlo tracé las perpendiculares a la carreta por cada uno de los puntos, recordé que esta es la distancia más corta de un punto a una recta, posteriormente, medí la distancia de cada punto al colegio, el único que no cumple es el punto 3, creo que puede haber tantos puntos con esta característica como perpendiculares pueda trazar.

E5. El punto 3, por la forma que tienen los puntos intuí que era la gráfica de una función cuadrática. Hay infinitos puntos en una función cuadrática, y el punto 3 se ve que no pasa por la gráfica.

Figura 6.

Evidencia de la respuesta del estudiante E1 en PN 2



Fuente: elaboración propia.

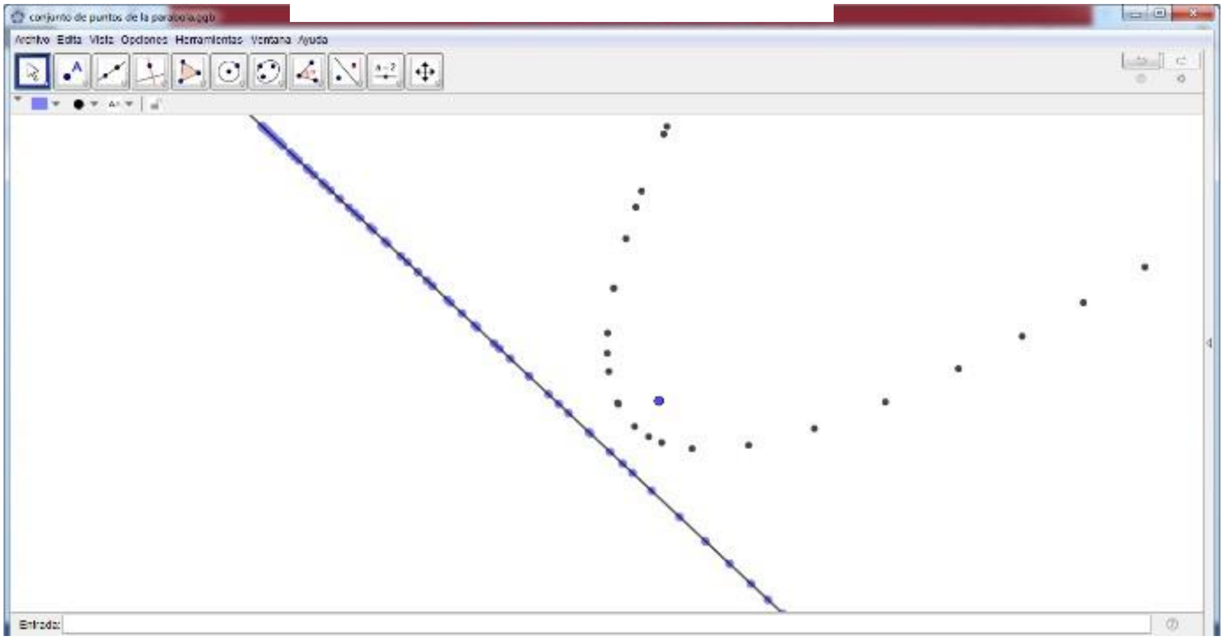
En la figura 6 se evidencia a manera de ejemplo, cómo el estudiante E1 reconoce y localiza puntos que equidistan de un punto fijo y una recta fija en el ambiente Geogebra , lo que permite detectar DN 2.1 y DN 2.4, teniendo presente además, las respuestas de los demás estudiantes.

Pregunta para el nivel III (PN 3): De clasificación

PN 3. En el ambiente de GeoGebra se ubicó un conjunto de puntos. ¿Podrías mencionar la propiedad que satisface este conjunto de puntos? ¿Cuál es el punto más cercano a la recta D? ¿Podrías mencionar otra característica de este punto?

Con esta pregunta se pretende que el estudiante reconozca que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola y que los puntos que la conforman satisfacen la propiedad de estar a la misma distancia de una recta fija D y de un punto fijo F.

Figura 7.
PN 3



Fuente: elaboración Propia (2019).

Respuestas dadas por los estudiantes:

E1. La gráfica se parece a una parábola, me acuerdo de ella el año pasado con la función cuadrática, pero esta son meros puntos. Realizando las medidas observé que cada punto de la parábola está a la misma distancia de la recta D que el punto F, esta debe ser la propiedad que la caracteriza.

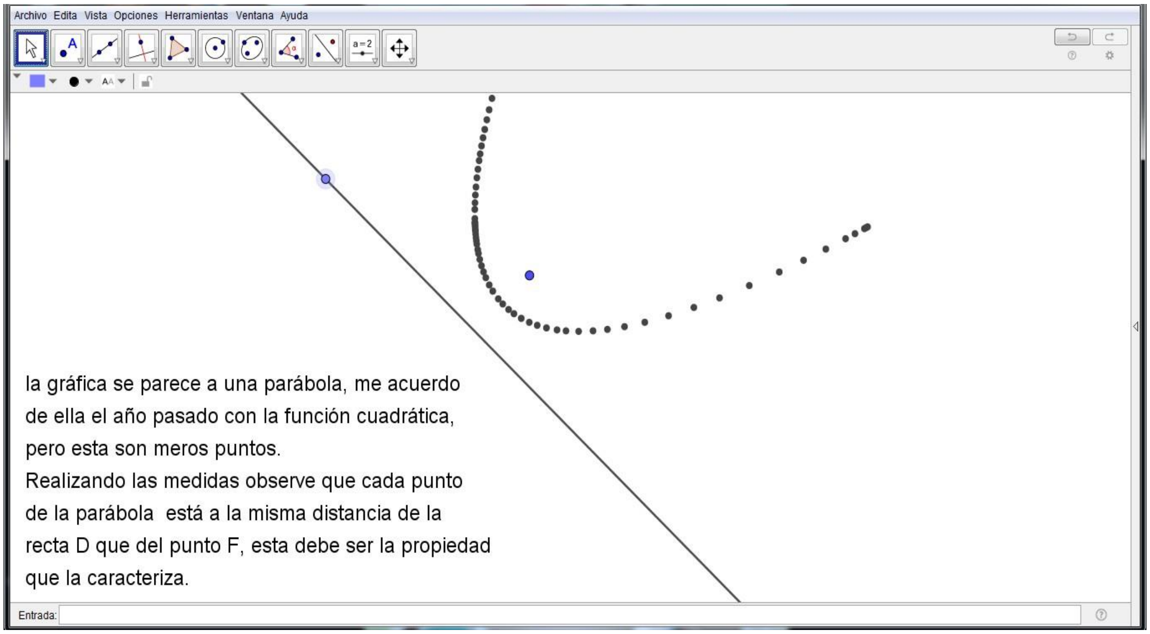
E2. La propiedad debe ser que es la gráfica de una función cuadrática, o sea una parábola, el punto más cercano es el vértice.

E3. Analizando las preguntas anteriores y con la herramienta distancia, todos los puntos satisfacen la propiedad de tener la misma medida en distancia, de la recta que del punto, es muy interesante. El punto más cercano a la recta D es la mitad del segmento perpendicular a la recta y que pasa por el punto fijo dado.

E4. Trazando perpendiculares a la recta, por cada uno de los puntos, y segmentos al punto fijo, estas dos medidas me dan igual con todos los puntos, es decir la distancia de cada punto a la recta es la misma distancia que hay de cada punto al punto fijo. La distancia más pequeña es la del segmento perpendicular a la recta y que pasa por el punto fijo, no la mitad de esta medida.

E5. Cada uno de los puntos dados, forma un triángulo isósceles, en donde los lados iguales son la distancia del punto a la recta y del punto con el punto fijo dado. Es decir, cada punto cumple que la distancia que hay de él a la recta es la misma que de él al punto fijo dado. El único punto que no formó un triángulo isósceles es el que tiene la distancia más corta a la recta.

Figura 8.
Evidencia de la respuesta del estudiante E1 en PN 3



Fuente: elaboración Propia.

En la figura 8 se evidencia como ejemplo, que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola, lo que permite detectar DN 3.1, teniendo presente además, las respuestas de los demás estudiantes.

Discusiones y conclusiones

Como primer aporte a la educación matemática, se evidencia que esta investigación valida la comprensión de un concepto matemático a través de una entrevista de carácter socrático en el marco del modelo de Van Hiele haciendo uso de un software dinámico.

A partir de la creación de un guion de entrevista de carácter socrático semiestructurado, y en el contexto de un ambiente de geometría dinámica, se tienen dos aportes: por un lado, se evidencia que el dinamismo o movimiento de los objetos geométricos que permite el ambiente de Geogebra, más allá de dibujos o gráficos estáticos, se constituye en un elemento adicional importante para detectar los niveles de razonamiento de los estudiantes en el marco del modelo de Van Hiele en función de los descriptores y, por otro, las herramientas que provee el ambiente, favorecen los análisis de propiedades, interacciones y construcciones conceptuales que posibilitan el avance por los niveles de razonamiento. También se puede afirmar que, mediante la experimentación y manipulación de distintos elementos geométricos en GeoGebra, el investigador logra detectar los descriptores de nivel, en función de las respuestas derivadas de los resultados y propiedades que los estudiantes logran manifestar con la ayuda de un ambiente interactivo como lo es el software de geometría dinámica GeoGebra, lo que se consolida como uninstrumento para analizar el nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico.

De esta manera, la presente investigación caracteriza los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele asociados a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra, y se propone como una alternativa para los profesores de matemáticas que deseen llevar a cabo análisis, investigaciones o estudios relacionados con la comprensión mediante la *entrevista socrática dinámica,* la cual se constituye en un aporte a la Educación Matemática.

Como futuras líneas de investigación, se propone el diseño de entrevistas socráticas dinámicas con las que se pueda detectar los diferentes niveles de razonamiento que impliquen conceptos de lugar geométrico.

Referencias

Antezana, R. P., Cayllahua, U., Yalli, E. & Rojas, A. (2020). Modelo Van Hiele y software GeoGebra en el aprendizaje de estudiantes en áreas y perímetros de regiones poligonales. *Horizonte De La Ciencia,* 10(18). https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2020.18.418

Bartolini, G. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. *The meaning of Mathematics Education* (37), 39 – 60.

Campillo, P. (1999) *La noción de continuidad desde la óptica del modelo de Van Hiele.* Universidad Politécnica de Valencia.

Cruz, L., y Mariño, M. (1999). Sistema computarizado para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista Educación*, (97), 14 – 21.

De la Torre, A. (2000) La Modelización del Espacio y del Tiempo: su Estudio Vía el Modelo de Van Hiele. [Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia].

De la Torre, A. (2003). El método socrático y el modelo de Van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, (24), 99-121.

Esteban, P. (2000). Estudio Comparativo del Concepto de Aproximación Local a través del Modelo de Van Hiele. [Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia].

Esteban, P. y Llorens, J. (2003). Aspectos comparativos en la extensión del modelo de

Van Hiele al concepto de aproximación local. *SUMA,* (44), 45-52.

Fiallo, J. (2000). *El modelo de Van Hiele y el Cabri Geométré en la enseñanza de la geometría*. http://funes.uniandes.edu.co/2389/

Fiallo, J. (2011). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. [Tesis de Doctorado, Universidad de Valencia].

Gaita, C., y Ortega, T. (2014). Unidades elementales en problemas de lugar geométrico en los cuadros geométrico y algebraico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática.* XVIII (. 317-326). SEIEM.

Gaitán, M., Lacayo, M., y Flores, W. (2014). Comprensión del aprendizaje de la parábola en undécimo grado aplicando el modelo de Van Hiele. *Revista Ciencia e Interculturalidad*, (15), 7-18.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En: Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.). *Teoría y práctica en educación matemática.* 295-384. Alfar.

Jara, C. (2015). Aplicación del modelo de razonamiento de Van Hiele mediante el uso del Software GeoGebra en el Aprendizaje de la geometría en tercer grado de educación secundaria del Colegio San Carlos de Chosica, 2014. [Tesis de maestría, Universidad Nanivelscional de Educación Enrique Guzmán y Valle La Cantuta, Perú). http://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/954/TM%20CE-Em%20J24%202015.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Jaramillo, C, (2000). La Noción de Serie Convergente desde la Óptica de los niveles de Van Hiele. [Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia].

Jaramillo, C., y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del modelo de Van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, (9), 65–84. https://www.emis.de/journals/DM/v91/art5.pdf

Jurado, F. y Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. [Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia].

Just, M., y Carpenter, P. (1985). Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. *Psychological Review,* (1), 137-172.

Land, J. (1991*). Appropialeness of the Van-Hiele Model for Describing Student's Cognitive processes on Algebra Tasks as Typified by College Student's Learning of Functions*.

University of Boston.

Lara, I. (2016). La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica. [Tesis de maestría no publicada, Pontifica Universidad Católica del Perú].

Llorens, J. L. (1994). Aplicación del Modelo de Van Hiele al concepto de Aproximación Local. [Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia].

Londoño, R, Jaramillo, C., y Esteban P. (2017) Estudio comparativo entre el modelo de Van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. *Revista logos ciencia & tecnología,* 9(2), 121-133. http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v9i2.451

López, J., Aldana, E., y Arboleda, (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *Respuestas*; *18*(2), 74-79.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares Básicos de Matemáticas. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Moreno, A. (2017). Mejorar las competencias matemáticas en los profesores de la enseñanza primaria de Porto Amboim, Cuanza Sur Angola. Una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría basada en el modelo de Van Hiele y fundamentada en el uso de las TIC. [Tesis doctoral, Universidad de Granada, Portugal). https://hera.ugr.es/tesisugr/28141209.pdf

Navarro, M.A. (2002) *Un estudio de la convergencia encuadrado en el modelo educativo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*. Universidad de Sevilla.

Peña, A. (2010). Enseñanza de la geometría con tic en Educación secundaria obligatoria. [Tesis doctoral, Universidad Nacional de Educación a Distancia].

Prat, M. (2015). Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área. [Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia].

Santa, Z. (2011). La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele. [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia].

Santa, Z., y Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En Morales, Yuri; Ramírez, Alexa (Eds.), *Memorias I CEMACYC,* 1-10. CEMACYC.

Santa, Z., y Jaramillo, C. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (41), 45-60. http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/464/986

Santa, Z., y Jaramillo, C. (2007). *Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de Van Hiele*. Universidad de Antioquia.

Sarrín, S (2019). Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele: resultados de una experiencia. *Educación,* 28(54), 127-158. https://dx.doi.org/10.18800/educacion.201901.007

Sucerquia, E., Londoño, R., y Jaramillo, C. (2013). El teorema Fundamental del Cálculo en la Educación a Distancia Online http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1280/648

Van Hiele, P. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). [Tesis doctoral, Universidad de Utrecht].

Van-Hiele, P. (1986). *Struture and insight: A Theory of Mathematics Education.* Academic Press.

Venegas, M. (2015). Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con estudiantes de 13 a 16 años en Cantabria [Tesis de maestría, Universidad de Cantabria]. https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6837/VenegasPerezIrene.pdf