

Agrupamiento Jerárquico para Selección de Centros de Interpolantes RBF

Selection of RBF Interpolation Centers by Hierarchical Clustering

Juan Rodríguez U*, Diego del Portillo, Germán Sánchez**

*jcrodriguez@gmail.com,

**gsanchez@unimagdalena.edu.co

Universidad del Magdalena

Santa Marta - Magdalena

Palabras clave:

Selección de centros de interpolación, agrupamiento jerárquico, reconstrucción 3d de imágenes, RBF

Resumen

La teoría de la interpolación está bien definida y desarrollada. Existen amplios estudios relacionados con su eficiencia, comportamiento y precisión. Sin embargo, al llevar estas teorías en campos de aplicación, en los cuales la cantidad de las muestras obtenidas de la función desconocida son significativamente grandes en relación con las capacidades de procesamiento de una computadora clásica, los procedimientos conocidos suelen enfrentarse a limitaciones de carácter computacional fundamentalmente. En estos casos es deseable obtener un conjunto reducido de estas muestras con el cual reconstruir la función. Reducir adecuadamente este conjunto de muestras sin una pérdida significativa en la precisión de la función reconstruida, pero con un balance adecuado en la carga computacional suele ser un problema no trivial. En este artículo se presentan un enfoque jerárquico de selección guiado mediante la distribución geométrica de las muestras en el espacio 3D.

Key words:

Selection of interpolation centers, hierarchical clustering, reconstruction of 3D images, RBF

Abstract

The theory of the interpolation is well defined and explained. Many related works show their efficiency, behavior and precision. However, when we applied these theories in engineering fields, in which, the obtained samples of the unknown function are too many in quantity in relation with the processing capacities of a classic computer, the well-known procedures usually face limitations of computational complexity. In these cases it is desirable to obtain a reduced group of these samples with which to reconstruct the function's surface. To appropriately reduce it without a significant loss of accuracy in the reconstructed function, but with a good balance of computational load, it is usually a non trivial problem. In this article we show up a hierarchical-based method for centers selection by means the geometric distribution of the samples in the 3D space.

I. INTRODUCCIÓN

La reconstrucción tridimensional de imágenes es un área de investigación que ha tomado fuerza en los últimos años debido a su gran potencial de aplicabilidad en diferentes campos como son la medicina, la automatización industrial, la robótica, y la seguridad, entre otros.

El proceso de la reconstrucción tridimensional de imágenes se realiza mediante un conjunto de fases lo que permite obtener una representación tridimensional de los objetos, muchas de estas fases son sub-campos de investigación en sí mismos, entre las diferentes fases de la reconstrucción tridimensional tenemos la etapa de adquisición, la etapa de registro, la etapa de integración, la etapa de ajuste y, en algunas aplicaciones particulares, la de texturizado [1]. Este trabajo se centrará en la fase de ajuste, debido a que esta fase es la que se encarga de encontrar la mejor estimación matemática para generar un modelo digital de una superficie real descrita por un conjunto conocido de puntos [1].

El ajuste de superficies tiene como fin obtener una descripción digital que sea precisa, concisa y aproximada la superficie real. La etapa de ajuste de imágenes de rango puede verse como cuatro problemas de optimización de la siguiente manera [1]:

- Criterio: Escoger la mejor función para optimizar (maximizar o minimizar).
- Estimación: Escoger el mejor método para optimizar la función elegida.
- Diseño: Realizar una implementación óptima del mejor método para obtener la mejor estimación de parámetros
- Modelado: Determinar el modelos matemático que describa mejor el sistema digitalizado, incluyendo un modelo de los procesos de error.

Uno de los métodos más utilizados para el ajuste de superficies es la interpolación con funciones de base radial, debido a que estas arrojan buenos resultados ya que tienen asociado un sistema de ecuaciones que

es invertible aun cuando los datos originales son dispersos. La teoría de la interpolación está bien definida y desarrollada. Existen amplios estudios relacionados con su eficiencia, comportamiento y precisión [7-8]. Sin embargo, al llevar estas teorías en campos de aplicación, en los cuales la cantidad de las muestras obtenidas de la función desconocida son significativamente grandes en relación con las capacidades de procesamiento de una computadora clásica, los procedimientos conocidos suelen fundamentalmente, enfrentarse a limitaciones de carácter computacional. En estos casos es deseable obtener un conjunto reducido de estas muestras con el cual reconstruir la función.

Reducir adecuadamente este conjunto de muestras sin una pérdida significativa en la precisión de la función reconstruida, pero con un balance adecuado en la carga computacional suele ser un problema no trivial. Así, uno de los mayores problemas de este tipo de técnicas es el de la selección de los centros de interpolación debido a que, la buena selección de estos, permite obtener buenos resultados disminuyendo el costo computacional.

El presente trabajo se centra en la selección de los centros de interpolación debido a que este es un problema abierto en el área de la reconstrucción 3D de imágenes.

II. INTERPOLACIÓN CON FUNCIONES DE BASE RADIAL

El problema de la interpolación de nubes de puntos dispersos se puede plantear formalmente como [1][2]:

Dado un conjunto de puntos distintos $\{f_i\}_{i=1}^N \subset \mathfrak{R}^3$ y un conjunto de escalares $\{f_i\}_{i=1}^N \subset \mathfrak{R}$, encontrar un interpolante $s : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que:

$$s(x_i) = f_i, i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Note que se utiliza la notación simplificada

$x = (x, y, z)$ para puntos $x \in \mathfrak{R}^3$

La idea principal de las funciones de base radial es la de seleccionar una función (usualmente llamada función de base radial) Φ : y una norma $\|\cdot\|$ en \mathfrak{R}^d tal que permitan calcular el interpolante S de la siguiente forma:

$$s(x) = p(x) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi(\|x - x_i\|) \quad (2)$$

Donde $p(x)$ es un polinomio lineal de bajo grado, los coeficientes λ_i son números reales, $\|\cdot\|$ es generalmente la norma euclídea en \mathfrak{R}^3 y x es el centro de interpolación.

Las funciones de base radial Φ más ampliamente utilizadas son las siguientes:

- Thin-plate Spline: $\Phi(r) = r^2 \log(r)$
- Gaussiana: $\Phi(r) = e^{-cr^2}$
- Multicuadrada: $\Phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$
- Bi armónica: $\Phi(r) = r$
- Tri armónica: $\Phi(r) = r^3$

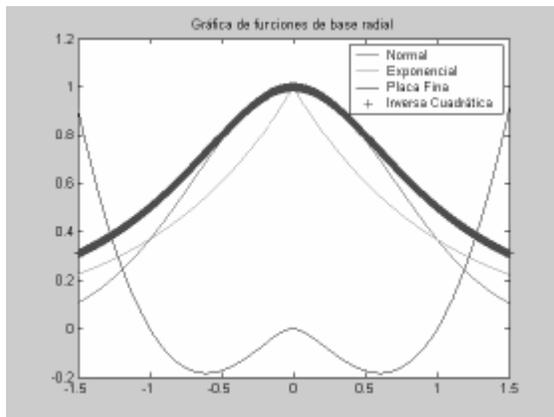


Figura 1. Gráfica de las funciones de base radial más utilizadas [4]

Las condiciones mostradas arriba definen un sistema lineal de ecuaciones de la forma

$$A\lambda = f \quad (3)$$

La ecuación (3) toma la siguiente forma al escribirla de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} A & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ c \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde $A \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$ y esta dado por $A_{i,j} = \Phi(x_i - x_j)$ para $1 \leq i, j \leq n$, $p_{i,j} = p_j(x_i)$ para $i = 1, \dots, N$ y $j = 1, \dots, l$

III. TRABAJOS RELACIONADOS

El campo de la selección de centros para interpolación con funciones de base radial ha sido ampliamente explotado debido a que contribuye de manera tajante en la reducción de la complejidad computacional en el ajuste de imágenes de rango y en la interpolación en general. Entre los trabajos realizados se encuentran el de Sanchez et al. [1] en el que se propone un método basado en el análisis de comportamiento de las soluciones óptimas generadas mediante una estrategia evolutiva (EE) y un algoritmo rápido de selección por medio de agrupamiento.

Liu en [3] presenta un método de interpolación utilizando redes neuronales con funciones de base radial como función de activación y haciendo reducción de centros de interpolación por medio de un algoritmo k-means modificado en el cual calculan un conjunto de voronoi para cada uno de los centros del grupo para después mover el centro del grupo a la media del conjunto de voronoi.

Carr en [2] desarrollan un método con funciones de base radial poli-armónicas para reconstruir y reparar nubes de puntos dispersos, para la reducción de puntos utilizan un algoritmo voraz (greedy) en el cual seleccionan primero un conjunto de nodos de interpolación y ajustan la RBF a estos, después evalúan el error de interpolación para todos los nodos y si el máximo error es menor que un parámetro de ajuste el algoritmo se detiene, de lo contrario agrega más centros y re calcula el error de interpolación; aunque el algoritmo de selección de centros es muy básico, esto no influye en rendimiento del gracias a la implementación de

métodos rápidos de posicionamiento que permiten la evaluación rápida de las FBR.

Pauly en [4] muestra métodos de clustering para reducir la complejidad de los objetos 3D, estas técnicas se basan en dividir el modelo en celdas y reemplazar todos los datos de las celdas por una menor cantidad de datos que los represente. Según Pauly existen dos aproximaciones para construir cluster: Region-Growing y Hierarchical Clustering, ambos enfoques crean conjuntos de cluster que son reemplazados por un centroide, para crear una nube de puntos simplificada

IV. SELECCIÓN DE CENTROS PARA INTERPOLACIÓN CON FUNCIONES DE BASE RADIAL

Los métodos de agrupamiento o *clustering* son ampliamente utilizados en la visión por computador ya que permiten clasificar los datos de acuerdo a un criterio determinado sin necesidad de supervisión. Entre los métodos de agrupamiento más utilizados encontramos *k-means* y *hierarchical clustering*.

El método propuesto utiliza una implementación de agrupamiento jerárquico que utiliza como medida de similitud la distancia euclídea y funciona en dos fases como sigue: el algoritmo inicia asignando cada punto a un grupo, para cada grupo calcula su media o centroide que para la primera iteración es el mismo punto; después se buscan el par de grupos cuya medida de similitud entre la media o centroide de cada grupo sea mínima, cuando ya se han identificado el par de grupos más cercanos se procede a unirlos y a actualizar la media del grupo resultante; este procedimiento se repite hasta que se llegue al nivel α de agrupamiento. Al final de este procedimiento, se tienen los centroides que representan a cada grupo y como estos valores no pertenecen al conjunto de datos original, se procede a buscar entre el conjunto de datos original los puntos que están más cercanos a los centroides para etiquetarlos como centros. Esto debido a que aunque no se conoce como realizar la mejor selección de

centros de interpolación, Hay una razón teórica que indica que la interpolación es óptima si los centros están situados en los puntos del objeto [9].

Una visión general de algoritmo en sus dos fases se muestra a continuación (ver Algoritmo 1):

```

Centroides = Agrupamiento_Jerárquico ( $\alpha$ )
    Asignar cada punto a un grupo
    actualizar las medias de los grupos
    Mientras que %Grupos <  $\alpha$ 
        Encontrar el par de grupos mas cercanos
        Unir el par de grupos encontrados
        Actualizar la media del grupo resultante
        Actualizar el %Grupos
    Fin Mientras
Fin
    
```

```

Centros = Encontrar_Centros (Centroides)
    Para cada uno de los Centroides
        Encontrar el punto más cercano de los datos
        originales al centroide(i)
        Etiquetar el punto encontrado como Centro
    Fin Para
Fin
    
```

Algoritmo 1. Procedimiento final de selección de centros

La búsqueda de los grupos más cercanos y de los puntos más cercanos a los centroides de los grupos se realiza gracias a la utilización del algoritmo del vecino más cercano implementado con estructuras de datos kd-tree las cuales nos permiten buscar puntos cercanos en nubes densas de puntos con excelentes tiempos de respuesta.

Uno de los factores más importantes del algoritmo es el parámetro α el cual permite establecer el grado hasta el cual se quiere que el algoritmo agrupe, esto es, cuando el parámetro α tiene un valor de 30 quiere decir que solo se agrupan el 30% de los datos, hay que aclarar que aunque solo se esté agrupando un porcentaje alfa de los datos el algoritmo mapea el

conjunto completo de los datos de manera uniforme logrando así en el caso del ejemplo anterior una reducción del 70% de los puntos en la imagen. Este parámetro debe ser introducido por el usuario para ajustar el grado de reducción y lograr una mayor o menor selección de centros según se requiera.

Tabla 1. Ejemplo de equivalencias entre el valor alfa de agrupamiento y el porcentaje de centros seleccionados y omitidos del total de puntos

Valor α	Porcentaje de Centros Seleccionados	Porcentaje de Centros Omitidos
10	10%	90%
40	40%	60%
70	70%	30%
100	100%	0%

V. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

Los experimentos se realizaron utilizando funciones matemáticamente definidas e imágenes reales para así obtener una buena validación del método. Los algoritmos fueron implementados en C++ utilizando la librería ANN para realizar la búsqueda del vecino más cercano, los resultados se muestran a continuación.

Tabla 2. Número de centros de interpolación seleccionados y error de interpolación generado para cada una de las imágenes.

N Puntos	Bowl	Cowboy Hat	Hill and Dale	Saddle
102	0.9237	0.0644	3.3654	17.2180
204	0.2751	0.0139	4.1489	6.1160
307	0.3505	0.0075	4.6940	0.7639
409	0.4434	0.0075	5.3567	0.4309
512	0.3224	0.0077	6.3118	0.6976
614	0.3995	0.0080	7.0421	0.5692
716	0.4584	0.0085	8.0376	0.6075
819	0.5488	0.0098	9.8053	1.2166
921	0.0411	0.0133	13.7730	0.0897

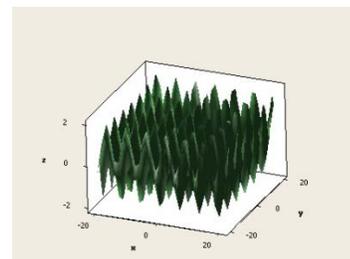
En la Figura 3 se puede observar un resumen gráfico de la Tabla 2, claramente se observa que el error de interpolación tiende disminuir a medida que aumenta el número de centros de interpolación excepto para la función *saddle*, esto se debe a que esta función

tiene una mayor variabilidad topológica disparando el error de interpolación.

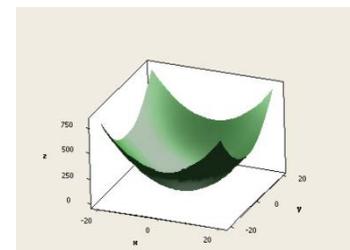
En la Figura 4 y 5 se observa como caso de estudio 2 imágenes reales y su respectivo resultado a distintos valores del parámetro alfa del algoritmo de agrupamiento.

VI. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

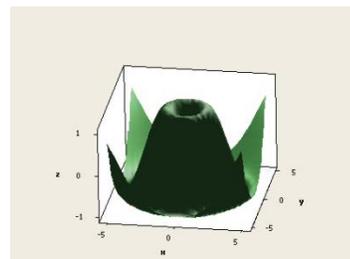
El método propuesto es un método simple para selección de centros de interpolación que permite decidir el grado o factor alfa de simplificación de la imagen original, a diferencia de otros métodos no necesita la realización de pre-procesamiento de la imagen ni de información adicional de la imagen solo utiliza la información de la distribución de los puntos y el cálculo de sus distancias.



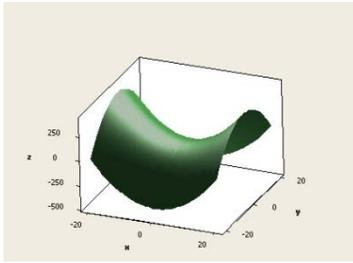
a)



b)



c)



d)

Figura 2. Gráficas de las funciones utilizadas para la validación del método, de arriba hacia abajo: a) Bowl, b) Cowboy hat, c) Hill and Dale y Saddle.

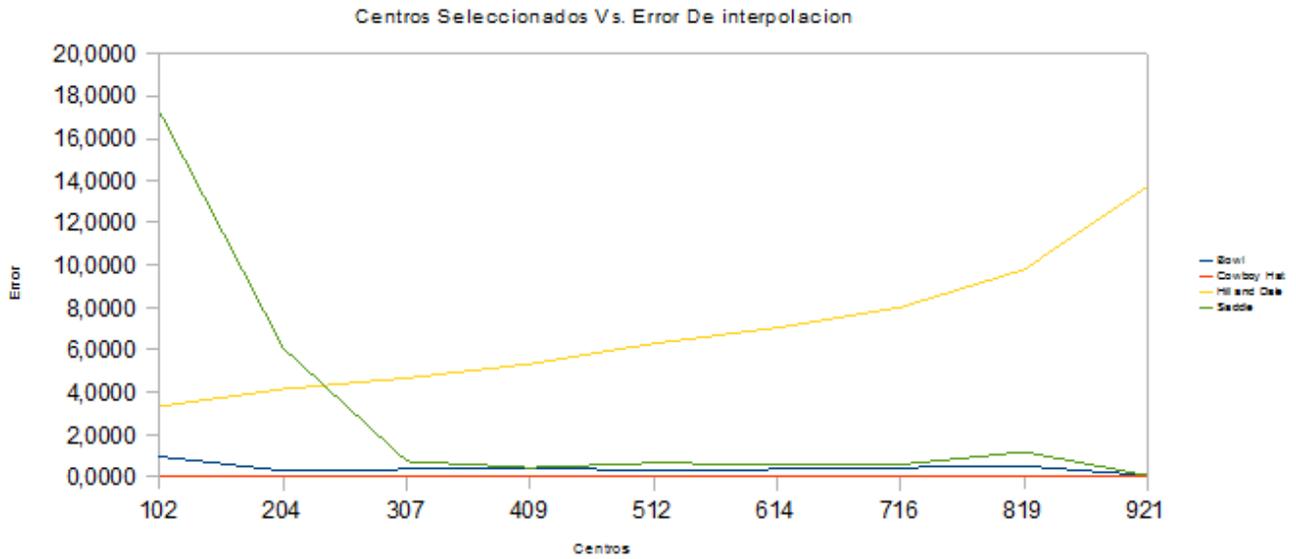


Figura 3. Gráfica de los centros seleccionados Vs Error de Interpolación

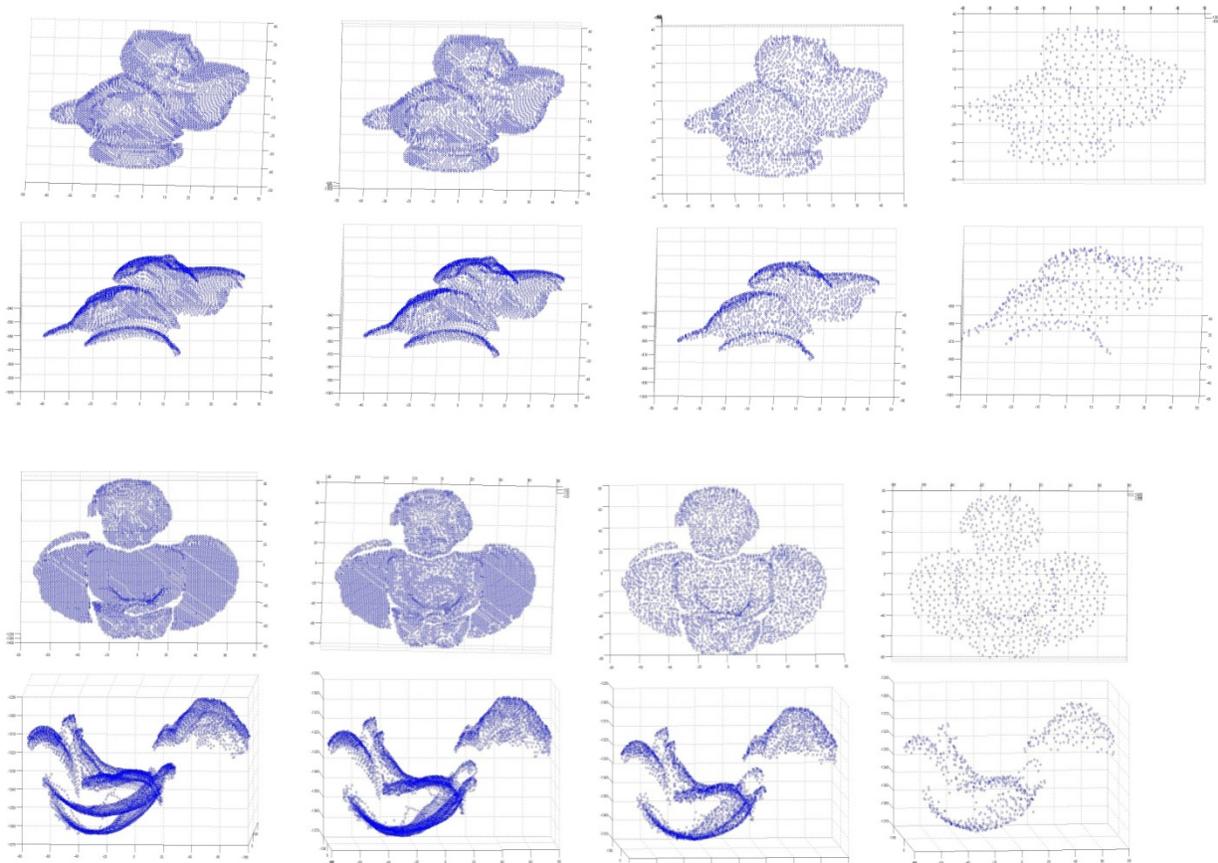


Figura 4. Imágenes de caso de estudio: Arriba ángel y abajo Pelicano, de izquierda a derecha: Imagen Original, selección de centros con $\alpha = 90$, $\alpha=50$, $\alpha=30$ y $\alpha=10$

Como se puede observar en los resultados, el método propuesto disminuye el error a medida que aumenta el parámetro α de simplificación cuando la superficie que se quiere interpolar es una superficie suave sin mucha variación topológica, como trabajo futuro queda abierta la posibilidad de cambiar la medida de similitud que actualmente es la distancia euclídea entre dos puntos por una medida que permita agrupar teniendo en cuenta características topológicas de la imagen como lo son curvatura y torsión.

REFERENCIAS

- [1] G. Sánchez, J. Branch. Ajuste de superficies de objetos 3D de forma libre a partir de datos de rango utilizando técnicas de triangulación.
- [2] J. Carr, R. Beatson, J. Cherrie, T. Mitchell, W. Fright, B. McCallum, T.
- [3] Evans. Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Functions.
- [4] H. Liu, X. Wang, X. Wu, W. Qiang. Surface Reconstruction Based On Radial Basis Functions Network
- [5] J. Branch, F. Prieto, P. Boulanger. Método de Llenado de Huecos en Mallas Triangulares Empleando Funciones de Base Radial. *Dyna*, año 74 ISSN 0012-7353
- [6] NILSSON, Nils J. Introduction To Machine Learnin. Stanford : Stanford University
- [7] R. K. Beatson and W. A. Light and s. Billings. Fast Solution of the Radial Basis Function Interpolation Equations: Domain Decomposition Methods. *Siam j. Sci. Comput.*. Vol. 22. No.5, 2000, pp.1717-1740.
- [8] M. Buhmann. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. Cambridge University Press. 2003.
- [9] R. Schaback. Creating Surfaces from Scattered Data Using Radial Basis Functions, *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design III*, M. Dæhlen, T. Lyche and L.L. Schumaker (eds.), Vanderbilt Univ. Press, 1995, pp. 477-496