THE T DISTRIBUTION: A TRANSFORMATION OF THE EMPLOYEE OF THE BREWERY

LA DISTRIBUCION T: UNA TRANSFORMACIÓN DEL EMPLEADO DE LA BREWERY

Recibido: 20 de noviembre 2013- aceptado: 12 de marzo 2014

Jorge Mario Insignares Movilla[1]
Universidad del Norte

Erick Eduardo OroZco Acosta[2]
Universidad Simón Bolívar

Keywords:
Density, Funtion, Transforms, Random Processes, Set, Mean, Desviation

Abstract
In situations where the size of the sample data set is relatively small, to assume a normal distribution. Some uncertainties exist. A mistake is to use random sampling and the other the small sample size. That is why, beginning with the story of the generalities that solved the problem t distribution, then about topics that support, and finally, a detailed analysis with some relationships with other distributions. While ignore the importance for hypothesis testing in statistical inference when means were contrasted

Palabras clave:
Marketing, Heurística, Algorítmico, Marketing Holístico, Creatividad, Lógica y Secuencial.

Resumen
En situaciones en las que el tamaño del conjunto de datos de la muestra es relativamente pequeño, se asumir una distribución normal. Existen algunas incertidumbres. Un error es el uso de un muestreo aleatorio y el otro el tamaño pequeño de la muestra. Por eso, a partir de la historia de las generalidades que resolvieron el problema de distribución de t, a continuación, sobre los temas que apoyan, y por último, un análisis detallado con algunas relaciones con otras distribuciones. Si bien ignorar la importancia de la prueba de hipótesis en la inferencia estadística cuando se contrastaron medios

1 Ingeniero Industrial, Universidad del norte, Magister en Estadística aplicada, Universidad del norte. jorgeinsignares@uninorte.edu.co
2 Ingeniero Industrial, Universidad Simón Bolívar, Magister en Estadística aplicada, Universidad Simón Bolívar. eorozco15@unisimonbolivar.edu.co
*Este artículo es asociado al proyecto de investigación: La Distribucion T: Una Transformación Del Empleado De La Brewery

INTRODUCCION

Según [1] se expone que: "Cualquier experimento puede considerarse que es un individuo de una "población" de los experimentos que pudieran realizarse bajo las mismas condiciones. Y a su vez, una serie de experimentos es una muestra extraída de esta población.

Ahora, cualquier serie de experimentos sólo tiene valor en la medida en que nos permite formar un juicio acerca de las constantes de estadística de la población a la que pertenecen los experimentos. En el mayor número de casos, la cuestión finalmente se convierte en el valor de una media, ya sea directamente, o como la diferencia de la media entre de dos cantidades.

Si el número de experimentos es muy grande, podemos tener información precisa en cuanto al valor de la media, pero si la muestra es pequeña, tenemos dos fuentes de incertidumbre: [1] debido al "error de muestreo al azar" de la media de la serie de experimentos, se desvía más o menos ampliamente a partir de la media de la población, y [2] la muestra no es suficientemente grande para determinar cuál es la ley de distribución de los individuos. Es usual, suponer una distribución normal, debido a que, en un número muy grande de casos, esto da una aproximación tan cerca que una pequeña muestra que no da ninguna información real en cuanto a la manera en que la población se desvía de la formalidad: desde una ley de distribución debe de asumir que es mejor trabajar con una curva cuya área y ordenadas las representen, y cuyas propiedades sean bien conocidas.

Este supuesto se hizo en consecuencia el presente documento (refiriéndose al trabajo propiamente), por lo que las conclusiones no son estrictamente aplicables a poblaciones sabiendo que no se distribuyen normalmente, sin embargo, parece probable que la desviación de la normalidad debe ser muy extrema para cargar a un error grave. Nos referimos aquí únicamente con la primera de estas dos fuentes de incertidumbre.

El método usual para determinar la probabilidad de que la media de la población se encuentra dentro de una distancia dada de la media de la muestra es suponer una distribución normal alrededor de la media de la muestra con una desviación estándar igual a $\frac{s}{\sqrt{n}}$, donde s es la desviación estándar de la muestra, y poder utilizar las tablas de la integral de probabilidad.
Pero, a medida que disminuye el número de experimentos, el valor de la desviación estándar encontrada a partir de la muestra de experimentos se convierte en sí mismo sujeto a un error cada vez mayor, hasta que los juicios alcanzados de este modo pueden convertirse extremadamente engañoso."

Éste fragmento del trabajo de W.S. Gosset [3], es el fundamento de la Distribución t y la justificación de este trabajo. Ahora surge un interrogante ¿Cómo se llega a la Distribución t?, a esta pregunta, responde éste trabajo. Y, para adentrarnos en dicha distribución es pertinente hacer un análisis de las demás teorías en las cuales se fundamenta ésta, aspecto que se aborda en los preliminares. Seguido de una sección donde se estudian a fondo la distribución en cuestión y después unas conclusiones.

Cabe resaltar, que de aquí en adelante, en este trabajo se utilizarán las notaciones $\triangleq$ $y \sim$, para representar solamente equivalencias entre la forma de cómo se distribuye una variable aleatoria.

Funciones de Distribución y densidad

En [4], se enuncian las siguientes definiciones que son de vital importancia en el fundamento de las distribuciones discretas y continuas de probabilidad:

Definición 1 Sea X una variable aleatoria discreta definida sobre un espacio muestral y supongamos que X toma valores x1; x2 (finito o numerable). Decimos que una función $f: \mathrm{R} \rightarrow [0,1]$ es una FUNCIÓN DE PROBABILIDAD de X si

$$f(z) = \begin{cases} P(X = x), si\ x = x_1, x_2, \dots; \\ 0,\ Otra\ forma \end{cases} \quad (1)$$

La ecuación 1, implica que:

$$(a)\ f(x) \geq 0\ \forall \in R$$
$$(b)\ \sum_{x \in R} f(x) = 1$$

Definición 2 *La* FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN (ACUMULADA) $f: R \rightarrow [0,1]$ de una variable aleatoria discreta X está definida por $F(t) = P(X \leq t) \forall\ t \in R$

$$F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x; x \leq t} f(x),\ \forall\ t \in R \quad (2)$$

Definición 3 Una función $f: \mathrm{R} \rightarrow [0, \alpha]$se dice que es una FUNCIÓN DE DENSIDAD de una variable aleatoria continua X si cumple las siguientes dos condiciones:

$$(a)\ P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx \,\forall\, a \ y \ b \ \in R$$

$$(b)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Definición 4 *La* FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN (ACUMULADA) *de una variable aleatoria continúa X; cuya densidad es f; es una función $f: R \rightarrow [0,1]$ definida por:*

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \forall\, t \ \in R \qquad (3)$$

Ahora, según [5], A menudo, se conoce la distribución de probabilidad de una variable aleatoria y están interesados en determinar la distribución de una cierta función de la misma. Por ejemplo, supongamos que sabemos que la distribución de X y quiere encontrar la distribución de g(X).

Entonces en, [6], se enuncia el teorema de distribución de una función de correspondencia uno a uno de una variable aleatoria:

Teorema 5 *Sea X una variable aleatoria con función de distribución FX conocida y definimos una nueva variable Y = g(X), donde g es una función correspondiente uno a uno en R; y g^{-1} es la inversa de g: Entonces:*

Si X es Discreta, la función de probabilidad f_Y de Y es obtenida de la función de probabilidad f_x de X por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\,(g^{-1}(y)), si\ y = g(x) para\ algún\ x \ \in Rango\ (X) \\ 0,\ Otra\ forma \end{cases} \qquad (4)$$

Si X es de otro tipo y g es estrictamente creciente, entonces la función de distribución f_Y de Y es obtenida de la función de distribución f_x de X por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, si\ y < g(x) \,\forall\, x \ \in Rango\ (X) \\ f_X\,(g^{-1}(y)), si\ y = g(x)\ para\ algún\ x \ \in Rango\ (X) \\ 1, si\ y > g(x) \,\forall\, x \ \in Rango\ (X) \end{cases} \qquad (5)$$

Si X es de otro tipo y g es estrictamente decreciente, entonces la función de distribución f_Y de Y es obtenida de la función de distribución f_x de X por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \quad , si\ y < g(x) \,\forall\, x \ \in Rango\ (X) \\ 1 - \lim_{t \to y} + \ f_X\,(g^{-1}(y)), si\ y = g(x)\ para\ algún\ x \ \in Rango\ (X) \\ 1 \quad , si\ y > g(x) \,\forall\, x \ \in Rango\ (X) \end{cases} \qquad (6)$$

Si X es continua y tiene función de densidad f_x; y g es diferenciable, además es correspondiente uno a uno, entonces Y tiene una función de densidad f_Y viene dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\,(g^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy} g^{-1}\,(y)\right| = \frac{f_X}{|g'(x)\,|},\ si\ y = g(x) para\ algún\ x \ \in Rango\ (X) \\ 0,\ Otra\ forma \end{cases} \qquad (7)$$

Distribución Normal

Según [7], la distribución normal es una de las más importantes y de mayor uso tanto en la teoría de la probabilidad, como en la teoría estadística. Algunos autores la llaman distribución gaussiana, en honor a Gauss, a quien se considera el "padre" de ésta distribución.

Definición 6 Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución normal de parámetro μ y σ, donde μ es un número real y σ es un número real positivo, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right];\ x \ \in R \qquad (8)$$

El parámetro μ es de localización y σ es de escala.

Definición 7 (Distribución Normal Estándar)
Si X $\triangleq N(\mu, \sigma^2)$ si y solo si $\frac{X-\mu}{\sigma} \triangleq N(0,1)$, entonces la distribución normal es estándar y su función de densidad se reduce a:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right];\ x \ \in R \qquad (9)$$

Observación 8 Sea X $\triangleq N(\mu, \sigma^2)$ y sea Si Y := aX + b donde a y b son constantes reales con a $\neq 0$ entonces aX +b $\triangleq N(\text{a}\mu + b, a^2\sigma^2)$

Observación 9 Sean $X_1 \ldots X_n$ variables aleatorias independientes tales que X $\triangleq N(\mu, \sigma^2)$ para cada i = 1,…, n. Entonces, $\overline{X}_{(n)} \triangleq N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Distribución Gamma
Algunas variables aleatorias son no negativas siempre y tienen distribuciones que son sesgadas a la derecha, es decir, la mayor parte de área bajo la grá.ca, de la función de densidad, se encuentra cerca del origen y los valores de la función de densidad disminuyen gradualmente cuando x aumenta.
Por otro lado, la distribución gamma se emplea, de manera extensa, en gran diversidad de áreas, como por

ejemplo, para describir intervalos de tiempo entre dos fallas consecutivas del motor de un avión, o los intervalos de tiempo entre las llegadas de clientes a la cola del punto de pago de un supermercado.

La distribución gamma es la generalización de tres casos particulares que, históricamente, surgieron primero: la distribución exponencial, la distribución Erlang y la Distribución Ji-Cuadrada.

En [8] [9] abordan la función gamma, su distribución y un caso especial. En [3]), algunas de sus propiedades y en [4], algunas relaciones con otras distribuciones. Lo anterior, se muestra a continuación:

Definición 10 La función gamma se de.ne como:

$$\tau(\alpha) = \int_0^\infty x\, x^{\alpha-1} \exp(-x)\, dx,\ para\ \alpha > 0 \qquad (10)$$

Definición 11 (Distribución Gamma) La variable aleatoria continua X tiene una distribución gamma, con parámetros α y β, si función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^a}{r(a)} x^{a-1} \exp(-\beta x), x > 0 \\ 0,\ \ en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases} \qquad (11)$$

Donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

Un caso especial de la distribución gamma, es la distribución exponencial, cuando se hace $\alpha = 1$ en 11, donde $\tau = 1$. Este último resultado, se mostrará en líneas siguientes (Propiedades de la Distribución Gamma).

Teorema 12 (Propiedades de la Distribución Gamma) La función gamma satisface las siguientes propiedades:

(a) *Para cualquier* $a > 0$ *se cumple que* $\tau(a+1) = a\tau(a)$.
(b) Para cualquier número natural n, tenemos que $\tau(n) = (n-1)!$

(b) $r(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Teorema 13 (Relaciones de la Distribución Gamma) Sea X una variable aleatoria real. Sea $\tau(\mu, \beta)$, la distribución gamma con parámetros $\mu\ y\ \beta$

(a) Si $X \triangleq N(\mu, \sigma^2)$, entonces $X^2 \triangleq \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2})$
(b) Si $X \triangleq \gamma(\alpha, \beta)$, entonces $cX \triangleq \gamma(\alpha, \frac{\beta}{c})$

Distribución Chi-Cuadrada

Según [10], ésta distribución juega un papel igual de importante que la distribución normal en el análisis estadístico de la variabilidad de los datos y las pruebas de hipótesis. A continuación, su definición y de [11], algunas relaciones:

Definición 14 La densidad de la distribución Chi-Cuadrada es:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\tau(\frac{n}{2})} 2^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \left[-\frac{1}{2}\right], x > 0 \qquad (12)$$

Donde n es un parámetro entero positivo que es llamado grados de libertad de la Distribución

Teorema 15 (Relaciones de la Distribución Chi-Cuadrada) Supongamos que X^2(n) representa la distribución Chi-Cuadrada con n grados de libertad.

(a) Si $X^2 \triangleq \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
(b) Si $X \triangleq N(0,1)$, entonces $X^2 \triangleq X^2(1)$

Teorema 16 (Distribución Chi-Cuadrada) Sean $X_1 \dots X_n$ variables aleatorias independientes con $E(X_k) = \mu$ y $Var(X_k) = \mu$ para cada k = 1,…, n; Además, sean $S^2_{(n)}$ y $\overline{X_{(n)}}$ la varianza y la media empírica de $X_1, \dots, X_n$, respectivamente.

(a) Se cumple que $E\left(S^2_{(n)}\right)$

(b) Sea $Y_k := \left(X_k - \overline{X_{(k-1)}}\right)\sqrt{\frac{k-1}{k}}\ para\ k = 2, \dots, Entonces\ Y_k$ y Y_k son independientes y se cumple que $\sum_{k=1}^n Y_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(X_k - \overline{X_{(k-1)}}\right)^n = (n-1)\, S^2_{(n)}$

(c) Si $X \triangleq N(\mu, \sigma^2)$ para todo k=1, … , n, entonces $\frac{n-1}{\sigma^2}\ S^2_{(n)} \triangleq X^2(n-1)$.También, $\frac{n-1}{\sigma^2}\ S^2_{(n)} \triangleq \gamma(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})$

Convoluciones de Medidas de Probabilidad

Teorema 17 Si X y Y variables aleatorias continuas, reales e independientes con las densidades de probabilidad f_x y f_Y respectivamente, entonces las densidades de probabilidad $f_{x\pm y}$, f_{xy} y $f_{\frac{x}{y}}$ Y de las variables aleatorias $X \pm Y, XY$ y $\frac{X}{Y}$, están dadas por:

$$f_{x\pm y} = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(t-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t-y) f_y(y)\, dy \quad (13)$$

$$f_{x-y} = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(x-t)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t+y) f_y(y)\, dy \quad (14)$$

$$f_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_x(x) f_y\left(\frac{t}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_x\left(\frac{t}{y}\right) f_y(y)\, dy \quad (15)$$

$$f_{\frac{X}{Y}} = \frac{1}{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_x(x) f_y\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_x(yt) f_y(y)\, dy \quad (16)$$

Observación 18 Algunos teoremas anteriores, se enuncian sin su demostración, porque se sale del verdadero objetivo de este trabajo que se centra en los detalles que se tratan es la sección siguiente con la Distribución t

Una Mirada a la Distribución t

Teorema 19 (Distribución t Student) Sean $X, Y, X_1, \dots, X_n\ y\ Y_1, \dots, Y_m$ variables aleatorias. Además sean $S_{(n)}^2$ y $\overline{X_{(n)}}$ respectivamente. $S_{(m)}^2$ y $\overline{X_{(m)}}$ la varianza y la media empírica de $X_1, \dots, X_n\ y\ Y_1, \dots, Y_m$, respectivamente. Supongamos que se tiene la independencia, por un lado entre todas las X_i; por otro lado, entre todas las Y_i ; y también entre X y Y. Si $\tau(n)$ representa la distribución t de student con n grados de libertad, entonces:

(a) Si X $\triangleq N(0,1)$ y $Y \triangleq X^2(\text{n})$, entonces:

$$t := \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}} \triangleq \tau(n)$$

(b) Si $X_i \triangleq N(\mu, \sigma^2)$ para cada i=1,…,n , entonces se cumple que $t := \frac{\overline{X_{(n)}} - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \triangleq \tau(n-1)$

(c) Si $X_i \triangleq N(\mu, \sigma^2)$ para cada i=1,…,n y

$Y_j \triangleq N(\mu_2, \sigma^2)$ para cada j=1,…,m, entonces

$$t := \frac{(\overline{X_{(n)}} - \overline{Y_{(n)}}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_{(n,m)}^2}{n} + \frac{S_{(n,m)}^2}{m}}} \triangleq \tau(m+n-2)$$

, siendo $S_{(n)}^2 := \frac{(n-1)S_{(n)}^2 + (n-1)S_{(m)}^2}{m+n-2}$ la llamada VARIANZA MUESTRAL COMBINADA

Demostración.

Como en [12], inicialmente se debe recordar que la densidad t de Student con n grados de libertad, que según en [13] es:

$$\tau(n) \sim \frac{\tau\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\tau\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{\tau^2}{2}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (17)$$

Por el teorema 15, es fácil demostrar que, si $Y \triangleq X^2(\text{n})$, entonces, $\frac{Y}{n} \triangleq \gamma(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ Esto se da, haciendo h(x) = nY , que al derivar queda $\frac{dh}{dx} = n.Y$, aplicando el teorema 5para la ecuación (12), queda:

$$f_y(y) = \frac{(nY)^{\frac{n}{2}-1} \exp[-(\frac{n}{2})\text{Y}]}{2^{\frac{n}{2}} \tau(\frac{n}{2})} |n|$$

$$= \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} Y^{\frac{n}{2}-1} \exp[-(\frac{n}{2})\text{Y}]}{\tau(\frac{n}{2})} \sim\ \triangleq\ \gamma(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$$

Como se tiene una expresión de la forma $\frac{k(x)}{l(x)}$ y en realidad es de la forma $\sqrt{\frac{k(x)}{l(x)}}$, entonces, haciendo $h(x) = x^2$, $h'^{(x)} = 2x$ y sustituyendo éstas dos funciones en la ecuación (7), del teorema 5, se tiene:

$$f_{\sqrt{x}} = f_x(x^2)|2x| = 2|x| f_x(x^2), \forall x > 0 \quad (18)$$

Como se necesita una función para $\sqrt{\frac{Y}{n}}$, entonces se sustituye (11) con parámetros $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$, (18). Y tenemos:

$$f_{\sqrt{x}}(x) = \sqrt{\frac{Y}{n}}\, f_x \sim \frac{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\tau(\frac{n}{2})} (x^2)^{\frac{n}{2}-1}\, 2xe^{-\frac{nx^2}{2}}, \forall x > 0 \quad (19)$$

Ahora se sustituye (9) y (19), en la segunda igualdad de (16), manteniendo x > 0:

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim \int_0^{\infty} \left[\frac{xe^{-\frac{(tx)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right] \left[\frac{\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2}}{\tau(\frac{n}{2})} (x^2)^{\frac{n}{2}-1}\, 2xe^{-\frac{nx^2}{2}}\right] dx \quad (20)$$

Al aplicar las Propiedades de la Integral en (20), como se plantea en [14]. Y, las leyes de los exponentes como: $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, $(ab)^n = a^n b^n, a^n a^m = a^{n+m}$ y $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ que están en [15], queda:

$$\frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\tau(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty} x^n e^{-\frac{n^2}{2}(t^2+n)}dx$$

$$=\frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\tau(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty} x(x^{n-1})e^{-\frac{n^2}{2}(t^2+n)}dx \quad (21)$$

En la segunda igualdad de (21), se sustituye $\mu = \frac{n^2}{2}(t^2+n)$. Esto, al derivarlo con respecto a x, se obtiene $\frac{du}{t^2+n} = xdx$ y despejando de la sustitución inicial se llega a que $\left(\frac{2u}{t^2+n}\right)^{\frac{n-1}{2}} = x^{n-1}$. Así mismo, por la naturaleza del método de integración, los límites no cambian pero están en función de u Por lo tanto, queda:

$$\frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\tau(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty}\left(\frac{du}{t^2+n}\right)\left(\frac{2u}{t^2+n}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-u}du \quad (22)$$

Aplicando las propiedades de los exponentes y de la integral que se usaron para simplificar en (21) y alterando el radical del denominador de la fracción, tenemos:

$$=\frac{2^{-\frac{1}{2}}\,2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}\,2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\tau(\frac{n}{2})(t^2+n)^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u}du$$

$$=\frac{2^{-\frac{1}{2}}\,2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}\,2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\tau(\frac{n}{2})(t^2+n)^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^{\infty} u^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-u}du \quad (23)$$

Ahora, como la integral de la ecuación (23), es de la forma de la ecuación (10) para $\alpha = \frac{n-1}{2}$ se sustituye. Simultáneamente, se simpli.ca tomando como referencia los números de base 2. Así mismo, al reescribir las expresiones algebraicas $(t^2+n)^{\frac{n-1}{2}}$ y $n^{\frac{n}{2}}$ como $(t^2+n)^{\frac{n}{2}}\ (t^2+n)^{\frac{1}{2}}$ y $n^{\frac{n+1}{2}}\ n^{-\frac{1}{2}}$, respectivamente y aplicando la última ley de los exponentes enunciada para reducir en (21), queda:

$$=\frac{2^{-\frac{1}{2}}\,2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}\,2^{\frac{n-1}{2}}\tau(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\tau(\frac{n}{2})(t^2+n)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$=\frac{n^{\frac{n+1}{2}}\ n^{-\frac{1}{2}}\,\tau(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\tau(\frac{n}{2})(t^2+n)^{\frac{n}{2}}\,(t^2+n)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{n^{\frac{n+1}{2}}\ \tau(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n2\pi}\,\tau(\frac{n}{2})(t^2+n)^{\frac{n}{2}}\,(t^2+n)^{\frac{1}{2}}} \quad (24)$$

Al expresar $n^{\frac{n+1}{2}}$ como $n^{\frac{n}{2}}\ n^{\frac{1}{2}}$ en la ecuación (24) queda:

$$=\frac{n^{\frac{n}{2}}\ n^{\frac{1}{2}}\ \tau(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n2\pi}\,\tau(\frac{n}{2})(t^2+n)^{\frac{n}{2}}\,(t^2+n)^{\frac{1}{2}}} \quad (25)$$

Entonces, al aplicar la primera ley de los exponentes que se usó para simplificar en (21) y algo de aritmética, tenemos:

$$=\frac{\tau\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n2\pi}\,\tau\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\tau(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n2\pi}\,\tau\frac{n}{2}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \sim \tau(n)= \quad (26)$$

La segunda igualdad de (26), según [16], es lo que se conoce como la distribución t-Student con n grados de libertad y es idéntica a la planteada en (17).

Esta distribución, el primero en derivarla fue William Searly Gosset. Éste era un matemático graduado de Oxford y trabajó en la cervecería Guinness Bewerie en Dublín (Irlanda). Gosset escribía bajo seudónimo de "Student" puesto que los empleados de Guinnes no estaban autorizados para publicar trabajos de investigación con su nombre.

Las circunstancias de trabajo en la elaboración de la cerveza, con su variedad de materiales, susceptibilidad a los cambios de temperatura y los experimentos pequeños, hicieron más rápidamente las limitaciones de la teoría para manipular muestras grandes y enfatizaron la necesidad de un método correcto para el tratamiento de muestras pequeñas.

Esto no fue ningún accidente, pero las circunstancias de trabajo, fueron las que direccionaron la atención de

"Student" a este problema. Éstas, son lo más relevante de las notas históricas consignadas en [11][17][18].

(b) Por las relaciones entre distribuciones de probabilidad enunciadas en las observaciones 8 y 9 de la distribución normal y el inciso (c) del teorema 16, se puede hablar de dos variables aleatorias independientes de la siguiente forma:

$$Z = \frac{\overline{x_{(n)}} - \mu}{\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1), \quad V = \frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (27)$$

Cuando se hacen las Variables Z y V genéricas a X y Y, esto se aplica al cociente del inciso (a) del teorema 19, queda (Nótese que las varianzas son iguales):

$$t := \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}} = \frac{\frac{\overline{x_{(n)}} - \mu}{\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S_{(n)}^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\overline{x_{(n)}} - \mu}{\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}} \sim \tau(n-1) \quad (28)$$

Este procedimiento, fue el que se usó en [10] para mostrar la distribución que tiene una $\overline{X}$ y S^2 de una muestra aleatoria de tamaño n de $N(\mu, \sigma^2)$

(c) Partiendo de que en el Numerador se da una distribución normal para ambas variables aleatorias y en el denominador se aplica la Chi-Cuadrada, se tiene:

$$Z = \frac{(\overline{X_{(n)}} - \overline{Y_{(m)}}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}} \quad (29)$$

Por otro lado, según Llinás H (2010), $V(\overline{X_{(n)}} - \overline{Y_{(m)}}) = V(\overline{X}_{(n)}) - V(\overline{Y}_{(m)})$, tenemos:

$$V = \frac{(n-1)S_n^2 - (m-1)S_m^2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}} \quad (30)$$

CONCLUSION

De acuerdo con lo sustentado en este trabajo, según el inciso (a), la distribución t es una transformación de un cociente de variables aleatorias independientes. A partir de esto, (b) y (c) son consecuencias de (a). Éstas, son muy usadas en la estadística inferencial cuando las muestras y las varianzas tienen características puntuales.

REFERENCIAS

[1] Student. The Probable Error a Mean. Biometrika , 6 (1), 1-25. 1908.

[2] Blanco, L. Probabilidad (Segunda Edición ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia. 2012.

[3] Llinás, H. Guía Resumida de Teoría de probabilidad. Barranquilla. 2012.

[4] Llinás, H. Estadística Descriptiva y Distribuciones de Probabilidad. Barranquilla:Editorial Universidad del Norte. 2012.

[5] Ross, S.. A .rst Course in Probability. Upper Saddle River: Pearson Education Inc. 2010

[6] Schay, G. Introduction to Probability with Statistical Applications. Boston:
Birkhäuser. 2007

[7] Blanco L. Probabilidad, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. 2004

[8] Walpole, R., & Myers, R.. Probabilidad y Estadística (Tercera Edición ed.). México D.F, Mexico: MacGraw-Hill.

[9] Grimmett, G., & Stirkzaker, D. Probability and Random Processes. London: Oxford University Press. 2001.

[10] Hasting, K. Probability and Statistics. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley. 1997.

[11] Llinás, H. Estadística Inferencial. Barranquilla: Ediciones Uninorte. 2010.

[12] Johnson, R. Probability and Statistics for Engineers. En R. Johnson, Probability and Statistics for Engineers (págs. 199-200). Boston: Person. 2011

[13] Soong, T. Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. London: John Wiley & Sons. 2004.

[14] Leithold, L. Calculus. Mexico: Oxford University Press.

[15] Lehmann, C. College Algebra. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1987.

[16] Shaw, W., & Lee, K. (2008). Bivariate Student t distributions with variable marginal degrees of freedom and independence. Journal of Multivariate Analysis , 1276-1287.

[17] Sanin, I. Teoría de la Probabilidad. Mexico D.F: Editoral Limusa. 1975.

[18] Zabell, S. On Student.s 1908 Article "The Probable Error of a Mean". Journal of the American Statistical Association , 103 (481), 1-7 2008.