EL DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE

Recibido: 15 de noviembre de 2011/Aceptado: 13 de diciembre de 2011

JOSÉ MANUEL SERRANO GONZÁLEZ-TEJERO*
ROSA MARÍA PONS PARRA**
Universidad de Murcia - España
MYRIAM ESTHER ORTIZ PADILLA***
Universidad Simón Bolívar, Barranquilla - Colombia

Key words:
Mathematical knowledge, Procedural knowledge, Declarative knowledge, Operational schemes, Mathematical literacy.

Abstract
Research on the construction of mathematical knowledge and especially based on the integration of skills, have been very prolific and have given rise to many interpretive models, primarily from the last quarter century. This review article presents an analysis which tries to explain the processes leading to this construction: its genesis, nature, mechanisms and the importance of experience in culturally defined contexts in their training. Finally, it presents a practical view of what mathematics instruction should be in order to bring the processes and theoretical research to the reality of the classroom and students.

Palabras clave:
Conocimiento matemático, Conocimiento procedimental, Conocimiento declarativo, Esquemas operatorios, Competencia matemática.

Resumen
Las investigaciones sobre la construcción del conocimiento matemático y en especial aquellas que lo hacen con base en la integración de habilidades, han sido muy prolíficas y han dado lugar a la aparición de muchos modelos interpretativos, fundamentalmente a partir del último cuarto de siglo. En este artículo de revisión, se ofrece un análisis que pretende explicar los procesos conducentes a esta construcción: su génesis, naturaleza, mecanismos y la importancia de la experiencia en contextos particulares culturalmente definidos en su formación. Al final, se presenta una visión práctica de lo que debería ser la instrucción matemática con el objeto de acercar los procesos investigativos y teóricos a la realidad del aula y de los estudiantes.

* Profesor Titular en la Facultad de Educación de la Universidad de Murcia. Campus Universitario de Espirnardo s/n 30071, Murcia, España. Email: serrano@um.es
** Profesora Asociada de Tiempo completo de la Universidad de Murcia. Murcia, España. Email: rmpons@um.es
*** Docente e Investigadora del Grupo Psicología Educativa, Universidad Simón Bolívar-Barranquilla y del INFOTEP-Ciénaga. Colombia. Email: mortiz@unisimonbolivar.edu.co

INTRODUCCIÓN

Los procesos conducentes a la construcción del conocimiento matemático han sido uno de los tópicos de investigación más prolíficos, tanto en el campo de la psicología en general, como en el de la psicología de la instrucción y las didácticas específicas. Tal investigación apunta a comprender los procesos mentales que el alumno utiliza cuando resuelve problemas matemáticos, en tanto que el propósito general (meta-objetivo) de todos los trabajos consiste en descifrar los mecanismos de construcción de este tipo de conocimiento a fin de lograr la *alfabetización cuantitativa* de los sujetos, para que sean capaces de interpretar los datos y utilizar unas matemáticas adaptadas a su quehacer cotidiano. Este objetivo general podría desglosarse en dos sub-objetivos.

El primero de ellos estaría vinculado al interés intrínseco de todo proceso investigador en la psicología del desarrollo y de la educación: determinar los mecanismos de construcción y desarrollo del pensamiento. El segundo, a la adquisición académica del conocimiento matemático mediante la comprensión y la representación de problemas en términos matemáticos, la adquisición de creencias y actitudes positivas sobre sí mismo y sobre sus conocimientos matemáticos y la aprehensión de habilidades de autorregulación. Todo esto como única vía para que el sujeto generalice su conocimiento concepto-procedimental de las matemáticas respecto a otras materias escolares y, en último término, lograr que sobrepase el marco puramente escolar, es decir, para que utilice las matemáticas de manera útil y adaptativa (Schoenfeld, 1992).

Dos son, pues, las razones que justificarían el interés por el estudio del desarrollo y la construcción del conocimiento matemático (Onrubia, Rochera & Barberá, 2004). La primera radicaría en el hecho de que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas reflejan y permiten abordar, de manera especialmente adecuada, temas básicos para la investigación psicoeducativa actual, como los procesos de resolución de problemas, los lenguajes formales y sistemas notacionales de representación que actúan como mediadores en los procesos de enseñanza y aprendizaje, o la relación existente entre los tipos de conocimiento (declarativo, procedimental y condicional) y entre estos y las capacidades metacognitivas. La segunda de las razones remite, con gran probabilidad, a las dificultades, ampliamente documentadas, que muchos sujetos muestran para aprehender el conocimiento matemático en el ámbito formal de aprendizaje (el aula).

Estas dificultades resultan aún más urgentes de resolver ante los niveles crecientes de conocimiento matemático, que parecen requerir un entorno social y tecnológico cuya complejidad aumenta exponencialmente y cuya razón habría que buscar en una triple vertiente. En primer lugar, en las características específicas del conocimiento matemático y fundamentalmente en su estructura interna, que se refleja en su doble entidad, como disciplina formal y aplicada. En segundo lugar, en la naturaleza de los instrumentos cognitivos que el sujeto debe desplegar para apropiarse de este conocimiento. Finalmente, en el doble carácter de su construcción, que es individual y socialmente mediada.

El conocimiento matemático

Hace un cuarto de siglo, el destacado matemático y científico computacional Seymour Papert (1983) se preguntaba si a los alumnos a los que se les enseñó álgebra durante un primer curso aprendían mejor la geometría del curso siguiente que aquellos que durante ese primer curso se limitaron a hacer gimnasia. Ante la respuesta negativa a la pregunta, se planteaba luego una nueva cuestión: "¿cabe identificar y enseñar algo distinto del álgebra o de la geometría y que, una vez aprendido, facilite el aprendizaje del álgebra o de la geometría?" (p. 131).

Nosotros efectuaríamos la misma pregunta pero en un formato distinto: ¿Hay que enseñar matemáticas a los niños o hay que hacer que piensen matemáticamente? Y si encontrásemos la respuesta en el segundo término de la disyunción, entonces cabría una segunda cuestión: ¿qué es el conocimiento matemático? y ¿qué supone hacer que los niños piensen matemáticamente?

El conocimiento matemático (o, si se prefiere, lógico-matemático) tiene unas peculiaridades que deben ser conocidas para entender los mecanismos de su adquisición y, de esta manera, elaborar las estrategias más oportunas para su enseñanza. Pero también tiene características que comparte con otros tipos de conocimiento (físico, social, etc.), que deben incorporarse al proceso de enseñanza y aprendizaje en las etapas iniciales de la escolarización. Ahora bien, ¿qué es este tipo de conocimiento que hemos venido denominando como lógico-matemático?

Es evidente que, en el proceso de interacción con el medio (sujeto-objeto), el sujeto solo tiene dos fuentes de extracción de la información: la acción y el objeto. Y los mecanismos mediante los cuales extrae la información reciben el nombre de *procesos de abstracción*. Dejando de lado los procesos de abstracción pseudoempírica, que se efectúan sobre las propiedades momentáneas de los objetos introducidas por la acción del sujeto (por ejemplo, la imantación de un bolígrafo por frotamiento), existen dos procesos básicos de abstracción: la *abstracción reflexiva*, que extrae información de la acción sobre los objetos; y la *abstracción empírica*, que extrae la información del propio objeto. La información que el sujeto extrae del objeto recibe el nombre de «conocimiento físico» y la que extrae de su acción sobre el objeto se denomina «conocimiento lógico-matemático».

La naturaleza del conocimiento matemático

La abundancia de trabajos e investigaciones en torno al desarrollo del pensamiento matemático constituye un buen indicador de la atracción suscitada por este tema en los investigadores cognitivo-evolutivos y educativos de todos los países (Royer, 2003; Ernest, Greer & Sriraman, 2009). Como hemos apuntado anteriormente, este interés se podría focalizar en dos conjuntos de razones, que se justificarían tanto desde la teoría como desde la praxis. Entre las razones teóricas se encuentran: la naturaleza jerárquico-secuencial peculiar de estos contenidos, que favorece en gran medida el estudio evolutivo de la adquisición de los mismos; la facilitación de este tipo de conocimiento para la articulación de reglas y procedimientos, que permite examinar más claramente que en otros ámbitos la relación entre representaciones y estrategias o representaciones formales y procedimientos; o la posibilidad de analizar independientemente la sintaxis (reglas procedimentales) y la semántica (significado), sus relaciones y la incidencia que la segunda puede tener para la adquisición de la primera.

Desde el punto de vista práctico, es notoria la importancia que esta ciencia posee actualmente en nuestra cultura y, de forma muy especial, su compleja traslación al currículo escolar que, sin embargo, no parece haber logrado hasta ahora un grado aceptable de alfabetización matemática en los individuos que componen nuestra sociedad.

Ahora bien, el conocimiento matemático presenta, al menos en su estado final de construcción, un conjunto de características peculiares que le otorgan una notable especificidad según Barberá & Gómez (1996):

- Es un conocimiento de un alto nivel de abstracción y generalidad, que elimina las referencias a objetos, situaciones y contextos particulares, y que se desvincula también de las formas de representación perceptivas e intuitivas de esos objetos, situaciones y contextos.
- Es de naturaleza esencialmente deductiva y no se valida mediante el contraste con fenómenos o datos de la realidad, como en otras disciplinas científicas, sino mediante un proceso interno de demostración a partir de determinadas definiciones fundamentales o axiomas. Este carácter deductivo provoca, además, que el conocimiento matemático tenga, aún en mayor medida que otras ciencias, una estructura altamente integrada y jerarquizada.
- Se apoya en un lenguaje formal específico, que presenta notables diferencias con el lenguaje natural: implica un conjunto particular de sistemas notacionales, busca la precisión, el rigor, la abreviación y la universalidad, y su finalidad fundamental no es tanto la representación o la comunicación de fenómenos o situaciones reales cuanto la posibilidad de obtener resultados internamente consistentes, realizando para ello inferencias válidas en términos del propio sistema axiomático que constituye el conocimiento matemático. También en este sentido, suprime intenciones, emociones y afectos, y es de naturaleza esencialmente teórica, impersonal y atemporal.

Es difícil que alguien esté radicalmente en desacuerdo con que las características anteriores definen el conocimiento matemático, y más bien considerará, de manera muy probable, que describen adecuadamente al menos buena parte de su experiencia matemática escolar. Sin embargo, y pese a la evidencia a favor de una caracterización como la que acabamos de plantear, cabe afirmar que esta es solo una cara de la moneda matemática. En efecto, las matemáticas tienen también una dimensión menos abstracta y descontextualizada, más funcional y relacionada con la resolución de problemas prácticos en situaciones concretas, más pragmática y situada.

La elaboración y desarrollo del conocimiento matemático no se puede separar, en este último sentido, de la acción concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas ligadas a tareas, problemas y contextos particulares, ni tampoco de los instrumentos y tecnologías de representación culturalmente elaboradas en apoyo de la actividad matemática. Desde esta perspectiva, las matemáticas constituyen, también, una actividad cultural social e históricamente situada, que se encuentra influenciada por criterios mundanos de utilidad e intencionalidad y se basa en prácticas cotidianas como contar, medir, localizar, diseñar, jugar o explicar (Bishop, 1999). No es pues de extrañar que, desde el campo de la sociología del conocimiento matemático se venga insistiendo, desde hace tiempo, en que el conocimiento matemático es una construcción social y que, por tanto, en su esencia se encuentran factores históricos y contingentes irreducibles (Ernest, 1991).

Cuando consideramos conjuntamente ambos aspectos de las matemáticas, estas nos aparecen como un dominio de naturaleza dual, que nos permite hablar de dos tipos distintos de significados relacionados con el conocimiento matemático: uno interno, formal, puramente matemático, y otro externo, referencial, que vincula el sistema formal de las matemáticas con algunos aspectos de la realidad. La coordinación de estos dos tipos de significados resulta compleja y constituiría lo que Brousseau (1983) definió como un obstáculo epistemológico para la adquisición y desarrollo del conocimiento matemático. De hecho, en muchos casos, se constata que muchos sujetos no llegan nunca a coordinarlos, sino que los mantienen separados, padeciendo una especie de «esquizofrenia semántica» entre el significado matemático y el significado referencial (Martí, 1996).

El resultado es que muchos aprendices aplican procedimientos matemáticos, pero no saben por qué funcionan; dominan las habilidades de cálculo necesarias para resolver problemas escolares estándar, pero carecen de la comprensión para aplicar su conocimiento a situaciones nuevas; son capaces de manipular símbolos, pero no entienden el significado de los mismos ni de lo que están haciendo con ellos. Para estos sujetos, su conocimiento matemático se circunscribe a la repetición mecánica de definiciones, demostraciones y fórmulas o a la aplicación, no menos mecánica, de algoritmos, con lo que las matemáticas acaban transformándose en una actividad críptica, carente de significado y encapsulada, alejada por completo del mundo real. La pregunta que sigue es evidente entonces: ¿cómo se adquiere 'correctamente' el conocimiento matemático?

Los tipos de conocimiento matemático

En primer lugar, sabemos que lo real se presenta ante el sujeto como un continuo que debe interpretar, lo que equivale a decir que le tiene que conferir un significado. Por ello interactúa con el medio, intentando descomponer y recomponer ese continuo a fin de *conocerlo*. Las unidades (funcionales) de conducta, mediante las cuales el sujeto interactúa con su entorno reciben el nombre de «esquemas». Un esquema es una «forma» que se aplica a un *contenido* (sin lugar a dudas, el contenido puede ser otro esquema e incluso el mismo esquema).

Los esquemas actúan en tres niveles: sobre lo real, sobre representaciones de la realidad y, en tercer caso, sobre los propios esquemas. Precisamente, la potencialidad de un esquema viene determinada por la variedad de contenidos a los que se puede aplicar. Por ejemplo, durante el periodo sensoriomotor, los esquemas (de acción) son formas que solo se pueden aplicar a un contenido real y presente; durante el periodo de preparación y organización de las operaciones concretas, los esquemas (simbólicos o representacionales) son formas que actúan sobre contenidos reales (presentes, simbólicos o simbolizados), es decir, actúan tanto sobre la realidad, como sobre representaciones de lo real; finalmente, durante el período de las operaciones formales, los esquemas pueden ser, alternativamente, formas y contenidos y, por tanto, pueden actuar sobre lo real, sobre representaciones de lo real y sobre los propios esquemas.

Supongamos un esquema representacional que llamaremos “opuesto” y que representaremos con (-), y supongamos, además, la representación numérica de un conjunto formado por cinco elementos (5). Entonces, podemos decir que el opuesto de 5 es -5. Como esta acción es interiorizada y reversible, la llamaremos operación y supone la aplicación de un esquema (forma), al que hemos llamado *opuesto*, a la representación de una realidad (contenido), una de cuyas características es la de tener cinco elementos. Lo anterior nos lleva a concluir que la construcción de los números negativos se debe producir durante el periodo de las operaciones concretas.

Supongamos, ahora, que el mismo esquema (opuesto) pudiera actuar sobre sí mismo; entonces estaríamos ante la siguiente situación -(-), que habría que definir como el *opuesto* del *opuesto*, y cuyo resultado sería que “el *opuesto* del *opuesto* es el mismo elemento”. Traducido en términos matemáticos y con lenguaje escolar: menos por menos = más. Por tanto, la llamada *regla de los signos* es una operación formal.

Para Piaget (1976), el sistema cognitivo humano está constituido por dos subsistemas: El subsistema I (que es el sistema de *comprender* o *conceptual*) y el subsistema II (que es el sistema de *saber hacer* o *procedimental*); es decir que, para Piaget, «conocer» es, indisociablemente, *comprender* y *saber hacer*. Los instrumentos cognitivos (esquemas) que sostienen estos dos subsistemas son los *esquemas presentativos* y los *esquemas procedimentales*.

En efecto, en 1979, Piaget e Inhelder introducen un nuevo par dialéctico en la teoría del eminente epistemólogo suizo, vinculado a la función reguladora de la inteligencia: estructuras versus procedimientos o conocimiento declarativo versus conocimiento procedimental (Inhelder & Piaget, 1979).

Para que el conocimiento matemático sea funcional, las redes de esquemas presentativos deben generar un conjunto de procedimientos. Estos procedimientos, normalmente denominados algoritmos, orientan las acciones necesarias para resolver problemas matemáticos. Los algoritmos son, por tanto, procedimientos que se aplican a una clase concreta o familia de problemas y que, si se siguen correctamente, garantizan también la solución correcta. Los algoritmos (el conocimiento procedimental) son muy importantes en la solución de problemas matemáticos; sin embargo, «seguir un algoritmo» no es «solucionar un problema», pero sí lo es que el alumno cree un algoritmo y lo aplique a una familia de problemas. Para que los algoritmos sean lo suficientemente flexibles al emplearlos en la solución de problemas matemáticos, deben basarse en el conocimiento declarativo y estar orientados por él (Bruning, Schraw & Ronning, 2002).

Las características generales comparadas de estos dos tipos de conocimiento se describen en la tabla 1.

Tabla 1.
Tipos de conocimiento

CONOCIMIENTO DECLARATIVO	CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL
No está sujeto a variaciones espacio-temporales (intemporal).	Está sujeto a variaciones espacio-temporales.
Está dirigido a comprender las razones (saber por qué).	Está dirigido a alcanzar un objetivo (saber hacer).
Necesita de comprensión consciente, sobre todo a partir del nivel operacional.	La comprensión consciente puede ser útil, pero no necesaria.
Se desarrolla mediante encajes sucesivos (el conocimiento superado se integra en el que le supera).	Se desarrolla mediante una cadena secuencial, sustituyendo cada enlace al anterior, al menos parcialmente.
Consiste en lograr el enriquecimiento cognitivo encontrando leyes de composición entre conocimientos y estructuras anteriores.	Consiste en lograr el enriquecimiento cognitivo a través de la variedad: alcanzar el objetivo por caminos diferentes.

El conocimiento declarativo

El conocimiento declarativo está constituido por los hechos (como una colección de eventos ordenada en función de un criterio), conceptos y sistemas conceptuales (que describen regularidades o relaciones entre hechos y que se designan mediante signos o símbolos) y principios (teorías o modelos explicativos o de naturaleza descriptiva normalmente basados en relaciones formales, lógicas y de causalidad) de carácter matemático. Este tipo de conocimiento es generado por un tipo de esquemas que Piaget (1976) denominó esquemas presentativos y que nos permiten comprender las razones (saber por qué).

El conocimiento declarativo no se limita, por tanto, a un conjunto de definiciones y de teoremas al margen del proceso de demostración que los sustenta. Conocer, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, no significa saber únicamente el enunciado final de dicho teorema, sino también el razonamiento mediante el cual se ha llegado a él. Ambas partes son componentes del conocimiento matemático de tipo declarativo, y contribuyen a la comprensión del teorema en cuestión. Ello resulta especialmente relevante desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de este tipo de contenido, que no debe limitarse a enunciados o formulaciones finales, sino que debe extenderse también a los procesos o caminos que conducen a estos enunciados o formulaciones finales.

En estrecha relación con el procedimental, el conocimiento declarativo aporta elementos relevantes que es preciso reconocer para ejecutar un procedimiento particular, como las características de un problema y sus condiciones internas. Así entendido, el conocimiento declarativo influye decisivamente en la comprensión y representación adecuadas y pertinentes de los problemas susceptibles de ser resueltos a través de métodos matemáticos, así como en la formación de nociones que posteriormente se aplicarán. Si estas nociones no se construyen de un modo sólido y congruente, se inducirá a los alumnos a graves errores, muchas veces difíciles de detectar y subsanar. Por ejemplo, la conocida creencia, en relación al algoritmo de la multiplicación, según la cual «siempre que se multiplica un número por otro el número se hace mayor» resulta, sobre todo en etapas iniciales de la escolaridad, muy intuitiva; sin embargo, no siempre es cierta y supone una clara simplificación conceptual del procedimiento, que, aunque pueda parecer aparentemente útil a corto plazo, perjudica en último término la propia representación de la operación.

El conocimiento declarativo en matemáticas se encuentra fuertemente mediado por el tipo de lenguaje formal y por los sistemas notacionales en que se expresa. Este lenguaje, como hemos señalado, no tiene un carácter simplemente comunicativo, sino también inferencial, y se convierte hasta cierto punto en un sistema autosuficiente. Además, se distingue de otros tipos de lenguaje porque en él juegan un papel importante variables de diferente tipología, por ejemplo, de carácter gráfico o posicional.

El conocimiento procedimental

El conocimiento procedimental es integrado por los procedimientos, a partir de esquemas procedimentales y nos permite saber hacer. En el ámbito de las matemáticas, este tipo de conocimiento supone la aplicación de secuencias de acciones y operaciones de las que se obtiene un resultado acorde con un objetivo concreto. Saber explicar un teorema no garantiza que se sepa aplicar correctamente en la resolución de una determinada situación problemática, y viceversa: una cosa es, por ejemplo definir el número π como "la razón de la circunferencia a su diámetro" y otra saber calcular los metros que recorre una rueda que da seis vueltas sobre su eje; ni lo primero asegura necesariamente lo segundo ni lo segundo, necesariamente lo primero.

El proceso de construcción de estas formas de actuación puede adquirir, en el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, una naturaleza *automática*, pues, debido a la complejidad procedimental, los procedimientos se van transformando en cadenas procedimentales o «procedimientos de procedimientos», que tienen la ventaja de permitir la simplificación de procesos posteriores, aunque atenuando al mismo tiempo su acceso consciente. A pesar de ello, este encapsulamiento de acciones encadenadas es necesario para el aprendizaje, puesto que deja espacio para operaciones que son cada vez más complejas.

Desde una perspectiva prescriptiva, se suelen distinguir en matemáticas dos grandes tipos de procedimientos: los algorítmicos y los heurísticos. Mientras que los primeros llevan a una solución adecuada si se siguen todos los pasos prescritos (piénsese en la realización de una raíz cuadrada, por ejemplo); los segundos no garantizan una correcta solución, pero guían de manera sistemática el proceso para llegar a ella (como dibujar 'un todo' dividido en partes para representar una fracción o descomponer un problema en submetas). Los procedimientos algorítmicos desarrollan, preferentemente, capacidades matemáticas fundamentales basadas en la repetición e implican su aplicación a contextos necesarios. En cambio, los procedimientos heurísticos implican un mayor esfuerzo cognitivo y exigen del alumno un proceso de toma de decisiones no predeterminadas, como sí ocurre en el caso de los algoritmos, en función de los resultados parciales que se van consiguiendo a lo largo de su aplicación (Pons & Serrano, 2011).

Sin embargo, el nivel de prescripción no es el único criterio posible para clasificar el elemento procedimental del conocimiento matemático. Si lo enfocamos desde una perspectiva funcional, encontramos dos grandes conjuntos de procedimientos que se aglutinarían en base a sendos criterios de clasificación: en función de las habilidades que promueven y en función de su grado de especificidad. En el primer caso, es posible distinguir, por ejemplo, entre procedimientos que permiten la recogida de información, la clasificación de datos, la inferencia de resultados parciales, la representación de modelos matemáticos, la expresión de resultados, etc., actividades todas ellas que suponen acciones específicas. En relación con el grado de especificidad, se reconocen procedimientos más generales en cuanto son más transversales, puesto que se pueden trabajar desde distintas áreas del currículo (histogramas, uso del ordenador o de la calculadora, etc.), y más específicos, en cuanto son propios de las matemáticas y poco transferibles a otras áreas curriculares (algoritmos específicos, series numéricas, etc.).

Los esquemas operatorios: la indisociabilidad declarativo-procedimental del conocimiento matemático

Aunque solo existen dos subsistemas cognitivos (comprender y saber hacer) y parece que ambos se encuentran dotados de los instrumentos adecuados (esquemas presentativos y esquemas procedimentales), para producir el conocimiento necesario en el ámbito matemático (declarativo y procedimental), es necesario recurrir a un tercer conjunto de esquemas porque existe un tipo de conocimiento que es indisociablemente declarativo y procedimental. Este tercer conjunto de esquemas es denominado por Piaget con el nombre genético de *esquemas operatorios*.

En efecto, tratemos de determinar, en la Figura 1, el cardinal del conjunto mediante la aplicación de un *esquema de conteo*:

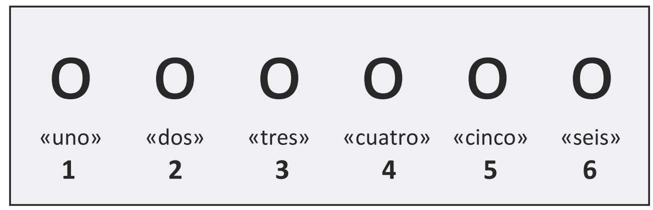

Figura 1. Conjunto para aplicación esquema de conteo

Comencemos con el punto inicial de la serie numérica y vayamos atribuyendo un numeral, y solo un numeral, de forma iterativa, a cada uno de los elementos del conjunto. Digamos entonces: "uno", "dos", "tres", "cuatro", "cinco" y "seis", hay seis canicas.

Supongamos que las canicas se disponen ahora de la forma como se muestra en la figura 2:

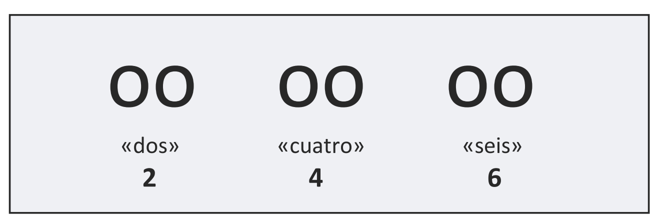

Figura 2. Reagrupación de las canicas

Es muy probable que, ante esta nueva situación, apliquemos el mismo esquema, es decir, el esquema de conteo, pero que esta vez, en lugar de contar siguiendo la serie de los números naturales, lo hagamos según la serie de los números pares: "dos", "cuatro" y "seis". Hay seis canicas.

Se ha variado la 'disposición espacial' de los elementos y hemos 'modificado' el esquema de conteo, la 'manera' de contar. Hemos utilizado el mismo esquema pero mediante un procedimiento diferente.

¿Qué podríamos decir del esquema de conteo? Evidentemente, que se trata de un esquema procedimental porque, al variar la disposición espacial de los elementos, y en aras de su eficiencia, el procedimiento de contar ha sido modificado. Por tanto, está sujeto a variaciones espacio-temporales; está dirigido a alcanzar un objetivo (determinar el cardinal del conjunto). La comprensión consciente de su ejecución no es necesaria, lo importante es contar eficaz (correctamente) y eficientemente (con rapidez); se desarrolla mediante una cadena secuencial en la que los enlaces son sustituidos de manera parcial [secuencia (n) vs. secuencia (2n)]; y, finalmente, permite alcanzar el objetivo por caminos diferentes.

Sin embargo, cuando contamos la primera serie, hemos dicho que hay seis canicas, porque hemos pronunciado el numeral «seis», pero también hemos pronunciado el numeral «cinco», y el «cuatro», y el «tres», etc. Entonces, ¿por qué no hemos dicho que hay «cinco», o «cuatro», o «tres»... canicas? Igual ha ocurrido cuando contamos la segunda serie: hemos pronunciado los numerales «dos», «cuatro» y «seis» y, a pesar de ello, hemos afirmado que hay seis canicas y no cuatro ni dos. Esto se debe a que hemos aplicado el principio cardinal, el cual establece que "el cardinal de un conjunto viene determinado por el numeral aplicado al último elemento contado" (Gelman & Gallistel, 1978, pp. 79-80). Esto es así, independientemente de la disposición espacial de los elementos del conjunto. Por tanto, este 'conocimiento' no está sujeto a variaciones espacio-temporales, si bien es necesaria su comprensión consciente: permite responder a la pregunta *¿por qué hay seis canicas en ese conjunto?*, luego está destinado a comprender las razones y es, en consecuencia, un conocimiento declarativo (no en vano lo denominamos *principio* cardinal), lo que nos conduce, sin solución de continuidad, a decir que el esquema de conteo es un esquema presentativo.

Pero, ¿cómo puede un esquema ser, a la vez, presentativo y procedimental?, ¿cómo puede generar, simultáneamente, un conocimiento declarativo y procedimental? La respuesta radica en que el esquema de conteo es un esquema operatorio.

Uno de los problemas de la enseñanza en general, y de las matemáticas en particular, consiste en que el maestro se propone que el sujeto 'sepa hacer', lo que equivale a decir que se fija objetivos procedimentales, descuidando los objetivos declarativos, con lo que está castrando el sistema cognitivo del individuo. Podríamos decir, parafraseando la suprema ironía de d'Alembert, que su principio-guía de la enseñanza es: "seguid haciendo, el conocimiento vendrá después" (la frase exacta de Jean le Rond d'Alembert es: "seguid, la fe vendrá después"). Si en todas las disciplinas esta postura constituye un error metodológico, en matemáticas supone un problema de enormes dimensiones, puesto que los esquemas lógico-matemáticos son operatorios y trabajar desde una perspectiva procedimental impide el desarrollo de los mismos ya que, aunque tengan un componente procedimental, no son procedimentales

El resultado de lo anterior es que, desde muy tempranas edades, los esquemas lógico-matemáticos se encuentren insuficientemente alimentados y como el conocimiento declarativo, que genera la parte presentativa del esquema, consiste, como hemos dicho, en lograr el enriquecimiento cognitivo, encontrando leyes de composición entre conocimientos y estructuras anteriores; si estos conocimientos, esquemas o estructuras no están disponibles, es evidente que no es posible construir sobre ellos. Por lo tanto, el fracaso está servido.

El conocimiento condicional

El conocimiento condicional supone la aplicación intencional y consciente del conocimiento declarativo y del procedimental en relación con las condiciones en las que se desarrolla la acción. Esto significa que el conocimiento condicional consiste en saber cuándo y por qué se debe emplear un determinado conocimiento (Pons & Serrano, 2011). Gracias a este conocimiento, quien conoce un determinado procedimiento matemático puede utilizarlo de manera específica y discriminada porque sabe cuándo y cómo aplicarlo y, para ello, es necesario que haya efectuado un análisis de las condiciones personales, de las condiciones relativas a la tarea, del profesor y del entorno. Todo ello lo conduce a determinar qué aplicación es la más adecuada para una solución eficiente y eficaz de una situación-problema concreta. En esta medida, el conocimiento condicional proporciona al sujeto un sistema de valoración sobre la extensión y las limitaciones de su saber (qué sabe sobre el tema, su capacidad de procesamiento, etc.), a la vez que le permite examinar la naturaleza de la demanda del profesor y su objetivo último, y evalúa variables externas, como pueden ser el tiempo que tiene para realizar la tarea o con quién la realiza.

Son numerosos los estudios que han demostrado que una cosa es saber ejecutar un procedimiento de manera perfecta y otra cosa muy distinta es saber en qué contexto se puede y se debe aplicar dicho procedimiento (Schoenfeld, 1992). Los sujetos con un elevado rendimiento en matemáticas poseen habilidades cognitivas de alto nivel, como pueden ser las habilidades metacognitivas de planificación, revisión, control, selección y evaluación de las propias actividades intelectuales. En este sentido, podríamos decir que el conocimiento condicional, más que un tipo de conocimiento es una manera de estructurar el conocimiento declarativo y procedimental. En efecto, cuando los sujetos se enfrentan a una tarea matemática pueden efectuar:

a) una *organización topográfica* (conocimiento estático) de los datos, que les permite establecer una descripción de los elementos que intervienen en el problema (conocimiento declarativo) y aplicar los algoritmos pertinentes para su solución (conocimiento procedimental),
b) una *organización secuencial* (conocimiento relacional) de los datos, que les permite describir y establecer una serie de pasos o etapas, relacionados coherentemente, para alcanzar la solución del problema (conocimiento declarativo) aplicando los algoritmos pertinentes en cada etapa (conocimiento procedimental),
c) una *organización condicional* (conocimiento incidental) de los datos, que les permite formular la solución de la situación problema en los términos *«si... entonces»* y en donde el conocimiento declarativo constituye la descripción de las reglas necesarias para la elección de rutas tendientes a

resolver el problema, en tanto que el procedimental se encuentra constituido por heurísticos y algoritmos expertos.

Veamos un ejemplo de soluciones aportadas por alumnos de 5º de Educación Primaria al siguiente problema extraído de un libro de texto de este nivel educativo (Peña *et al.*, 2010): Si extraigo de un recipiente las tres cuartas partes de su capacidad total, que son 300 litros, ¿cuántos litros quedan en el recipiente?

1. Alumno A (organización topográfica conducente a respuesta errónea)
   - Conocimiento declarativo: los datos numéricos del problema son dos números, uno fraccionario y uno entero.
   - Conocimiento procedimental: en estos casos, se multiplica el entero por el numerador y se divide por el denominador.

     Solución: ¾ por 300 es 3 x 300 = 900:4 = 225 litros
2. Alumno B (organización topográfica conducente a respuesta correcta)
   - Conocimiento declarativo: los datos numéricos del problema son dos números, uno fraccionario y uno entero.
   - Conocimiento procedimental: en estos casos se multiplica el entero por el numerador y se divide por el denominador.

     Solución (1): ¾ por 300 es 3 x 300 = 900:4 = 225 litros

     2’. He sacado 225 litros y me preguntan cuántos litros quedan. Tengo que resolver un nuevo problema.
   - Conocimiento declarativo: los datos son dos números enteros y sacar quiere decir restar.
   - Conocimiento procedimental: en estos casos se hace una resta poniendo el mayor arriba y el menor abajo y colocando los números uno debajo del otro.

     Solución (2): 300 – 225 = 75 litros quedan.
3. Alumno C (organización secuencial)
   - Conocimiento declarativo: En primer lugar hay que calcular los litros que se han sacado, teniendo en cuenta que el todo se considera dividido en cuatro partes y se extraen tres. Los que quedan, serán la diferencia entre la capacidad del recipiente y lo extraído.
   - Conocimiento procedimental: Hay que dividir los litros del depósito entre cuatro para saber cuántos litros son una parte y multiplicando por tres sabremos lo que se ha sacado. Luego, restando el total menos lo extraído tendremos lo que aún permanece en el interior del recipiente.

     Solución: 300:4 = 75 x 3 = 225 litros; 300 -225 = 75 litros quedan.
4. Alumno D (organización condicional):
   - Conocimiento declarativo: El todo se ha dividido en cuatro partes, si se han sacado tres, entonces queda una.
   - Conocimiento procedimental: Para calcular la cuarta parte se divide el total de litros entre cuatro.

     Solución: 300:4 = 75 litros quedan

A tenor de lo expuesto, podemos afirmar que la actividad para la apropiación del conocimiento matemático requiere la adquisición integrada de conocimiento de ámbito específico y de habilidades cognitivas más generales, aunque aplicadas a la especificidad del área.

EL DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Para Kitcher (1988a), el conocimiento matemático no está constituido desde el comienzo, y *a priori*, en cada generación. En cada momento se aprende un cierto nivel matemático que puede ser, y de hecho lo es, permanentemente modificado. En ese desarrollo, el conocimiento viene apoyado por cierta práctica que, para este autor, posee varios componentes (Kitcher, 1988b). En concreto, dichos componentes son:

- Un lenguaje.
- Un conjunto de proposiciones aceptadas por la comunidad matemática en un tiempo determinado.
- Un conjunto de cuestiones importantes, de problemas no resueltos.
- Un conjunto de formas de razonamiento.
- Un conjunto de visiones del hacer matemático, es decir, de cómo se hacen matemáticas.

Podemos comprobar, sin caer de pleno en la historicidad werneriana, que estos componentes que Kitcher sitúa en la filogénesis, pueden ser trasladados, con todo derecho, a la ontogénesis.

En efecto, en cada momento de la psicogénesis *se adquiere un cierto nivel matemático que está en continuo cambio*. Por ejemplo, hemos podido comprobar (Serrano, 2005) en la macrogénesis, un desarrollo que podría perfectamente responder a esta secuencia: esquemas aditivos → pensamiento aditivo conmutativo → generalización de los esquemas aditivos → esquemas multiplicativos → pensamiento multiplicativo conmutativo → coordinación de esquemas aditivos y multiplicativos → pensamiento distributivo → ... →. Analizando el desarrollo de los esquemas de conteo, se puede comprobar igualmente, pero ahora en la microgénesis, una secuencia evolutiva: aplicación de palabras-número (no tienen por qué ser numerales), sin ningún tipo de orden, a los objetos (uno, tres, doce, nueve, "veinticatorce", seis...) → aplicación de numerales, sin ningún tipo de orden, a los objetos (uno, tres, doce, nueve, siete...) → aplicación de numerales a los objetos en un orden (sabe que unas palabras se dicen antes que otras) no estable (uno, tres, seis, nueve, once..., aunque otras veces puede decir: uno, dos, cuatro, nueve...) → aplicación de numerales a los objetos con un orden estable que no responde a la cadena de los números naturales (uno, tres, siete, nueve,.., y si vuelve a contar el mismo conjunto repite la misma serie: uno, tres, siete, nueve,...) → aplicación de numerales a los objetos con un orden estable que se corresponde con la cadena de los números naturales (uno, dos, tres, cuatro, cinco,...) pero que tiene carácter irrompible (siempre se empieza a contar por el número 'uno') → ... →.

Este conocimiento se apoya en cada momento en un *lenguaje* determinado. De manera que hemos de analizar las ejecuciones correctas o incorrectas del sujeto desde la «historicidad ontogenética». Por ejemplo, cuando le damos a un niño de cuatro años una cantidad discreta, compuesta por un conjunto de siete fichas y le pedimos que construya un conjunto *más* numeroso que el que nosotros hemos elaborado, es probable que su ejecución sea similar a la que se muestra en la Figura 3.

O O O O O O O
O O O O O O O

Figura 3. Posible construcción de un grupo más hecha por un niño de 4 años

Sin embargo, si le pedimos que construya un conjunto *menos* numeroso que el nuestro, podría realizar algo como lo mostrado en la Figura 4:

O O O O O O O
O O O

Figura 4. Posible construcción de un grupo menos hecha por un niño de 4 años

Esto nos podría llevar a concluir, erróneamente, que el sujeto sabe construir un conjunto menos numeroso que otro dado, pero no un conjunto más numeroso. Sin embargo, como el sujeto aprende (también) por imitación, sería muy difícil sostener esta afirmación, porque, en el lenguaje coloquial, la expresión *más que* es comúnmente utilizada, mientras la expresión *menos que* está prácticamente en desuso. Por ejemplo, comúnmente nosotros decimos: más alto vs. más bajo, más grueso vs. más delgado, más largo vs. más corto y casi nunca recurrimos a expresiones tales como menos alto, menos grueso, menos largo. Desde esta perspectiva parece más sensato que el pequeño 'aprenda' antes el significado del *más* que el significado del *menos* (siquiera por la dificultad que supone la construcción de la negación).

Supongamos ahora que le damos un conjunto formado por tres elementos y le pedimos que construya un conjunto *más* numeroso que el que nosotros hemos hecho. El niño podría hacer lo mostrado en la Figura 5:

O O O
O O O O

Figura 5. Posible construcción más objetos que 3

Pero si le decimos que ponga uno *menos* numeroso que el nuestro, su ejecución podría ser como se muestra en la Figura 6:

O O O
O O O

Figura 6. Posible construcción menos objetos que 3

Siguiendo con nuestras suposiciones, diríamos que ahora es capaz de construir un conjunto más numeroso que otro dado, pero no un conjunto menos numeroso. Sin embargo, ninguna de las dos conclusiones a las que hemos llegado es correcta, porque el sujeto no puede ser, a la vez, hábil e inhábil. La realidad es la siguiente:

Los términos *más* y *menos*, en tanto que "vectores lingüísticos", tienen un carácter objetivo. No obstante, la dificultad de descentración de los niños de estas edades, hace que se subjetivicen los términos del lenguaje y se asocien estos vectores a los "escalares subjetivos" *muchos* y *pocos*, de manera que cuando le damos 'siete' elementos y le pedimos "pon más que yo", él interpreta "pon muchas (más) como (que) yo" y cuando le digo "pon menos que yo", interpreta "ahora tengo que poner pocas (menos)". Por el contrario, cuando hemos determinado que, para el niño, ('siete') son muchas y ('tres') son pocas, le damos un conjunto de 'tres' fichas (pocas) y le hacemos las mismas preguntas. En el primer caso, coloca debajo su estimación (subjetiva) de «muchas» que, en ese momento y para el conjunto de las fichas, es 'cinco' y cuando le pido "pon menos que yo", interpreta: "ahora tengo que poner pocas (menos) como (que) él" y, por tanto, pone 'tres'.

Igualmente, el conocimiento matemático del sujeto *se apoya en un conjunto de proposiciones aceptadas por el pensamiento en un momento determinado de la psicogénesis*. En efecto, cuando en la situación anterior, le interrogamos acerca de la construcción de la igualdad ("pon las mismas que yo") con una colección de 'siete' elementos, podría realizar una ejecución como la mostrada en la figura 7:

O O O O O O O
O O O O O O O O O

Figura 7. Construcción con la instrucción: ***pon las mismas que yo***

Esta ejecución es correcta desde su perspectiva, ya que la proposición aceptada como verdad para su pensamiento es que "dos colecciones que tienen la misma longitud son iguales". Siguiendo la propuesta de Kitcher, el conocimiento matemático *se genera a partir de un conjunto de cuestiones importantes y de problemas no resueltos*, pero estos problemas importantes para el sujeto y problemas no resueltos por el sujeto, se encuentren en su zona de desarrollo potencial (Vygotski) y, por tanto, puedan ser resueltos mediante procesos de "equilibración mayorante" (Piaget). Este componente determina la necesidad de efectuar, tanto un análisis logocéntrico (contenidos), como teleocéntrico (objetivos y metas), que garantice la *competencia matemática* del sujeto construyendo el significado (qué y cómo) y, simultáneamente, atribuyendo sentido a lo aprendido (para qué).

El conocimiento matemático necesita apoyarse en *un conjunto de formas de razonamiento* de las que va a depender el tipo de este conocimiento y sus formas de adquisición. En este sentido, a lo largo del desarrollo, encontramos tres formas de razonamiento que constriñen la elaboración de las construcciones mentales y determinan los contenidos intencionales de las acciones y las posibilidades de conferir significados a lo real. Estas tres formas de razonamiento corresponden a los estadios de desarrollo en los que el sujeto puede manejar símbolos y signos (función semiótica) y son las siguientes:

a) El razonamiento *transductivo*, que al ir de lo particular a lo particular, impide efectuar generalizaciones y, por tanto, generar conceptos. Es el razonamiento propio de la etapa preconceptual, primera de las cuatro etapas del estadio de preparación y organización de las operaciones concretas. Es exclusivo de la etapa preconceptual, siendo la etapa intuitiva un periodo de transición al razonamiento inductivo.
b) El razonamiento *inductivo*, que va de lo particular a lo general y se desarrolla a lo largo de las dos últimas sub-etapas (organización de las operaciones concretas) del estadio.

c) El razonamiento *deductivo*, que va de lo general a lo particular, es característico del estadio de las operaciones formales.

Finalmente, Kitcher postula que *el conocimiento matemático depende de un conjunto de visiones del hacer matemático*, es decir, de cómo se hacen matemáticas. Las cuatro grandes líneas básicas en el saber y en el hacer matemático son las siguientes según De Lorenzo (2000, pp. 27-28):

- Constructivista: que emana de Brower y, fundamentalmente, de Kant y que supone aceptar que son las entidades reales las que, al permanecer o transformarse, provocan el pensamiento matemático y, al hacerlo, obligan a la construcción de formas y estructuras que tratan de captar, de alguna manera, los procesos reales y provocan la construcción de modelos posibles de esa realidad.
- Empirista: que tendría a Mill como máximo exponente y que se plantea la cuestión de cómo se alcanza el conocimiento y cómo se enlaza la matemática con lo real (enlace que se estima como algo más que un mero accidente).
- Logicista: que, teniendo a Frege como autor más representativo, se apoya en el proceso demostrativo a partir de unos contenidos de pensamiento puro y se plantea la necesidad de unas conceptografías básicas, diferentes del lenguaje natural, para la expresión del hacer matemático.
- Formalista: que apoyada en el poder del signo y de lo ideográfico, se plasma en los procesos algebraicos, en el «Análisis» de Euler y Lagrange, en los principios de permanencia de las leyes formales, en el inscripcionismo sígnico de Heine o Thomae y culmina con el formalismo finitista de Hilbert.

Si en cada uno de estos posicionamientos admitimos que se encuentra, en parte, «la verdad», entonces las nociones matemáticas deben ser, por tanto y por este orden, constructivas (provocando el pensamiento matemático), empíricas (enlazando siempre el contenido matemático con la realidad circundante al sujeto), lógicas (diferenciando lo real de la acción, el mundo físico del pensamiento, el lenguaje natural del lenguaje matemático) y formales (sostenidas por sistemas de representación específicos y por la permanencia e invarianza de las leyes cognitivas que son, en última instancia, de naturaleza lógico-matemática).

LOS PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

La caracterización de las matemáticas, que hemos efectuado al principio como un dominio de naturaleza dual, nos obliga a ir más allá de la construcción individual del conocimiento matemático y a considerar que la adquisición de los saberes matemáticos supone un proceso de construcción mediada. Esto quiere decir que los sujetos construyen el conocimiento matemático mediante la interacción, la negociación y la comunicación con otras personas en contextos particulares culturalmente definidos, y en el que determinados artefactos e instrumentos culturales juegan también un papel decisivo.

Esta caracterización determina un modelo de adquisición de la competencia matemática que postula, en primer lugar, que esta no se puede adquirir sin un proceso continuado de construcción por parte del sujeto, que requiere su participación en una amplia gama de situaciones y contextos de actividad matemática relevante. En segundo lugar, el modelo postula que estos procesos de construcción y participación no tienen un carácter individualista, sino que son procesos de co-construcción y co-participación, por lo que los procesos de interacción entre iguales son fundamentales para la adquisición del conocimiento matemático. En este sentido, tanto desde planteamientos sustantivos y teóricos de carácter general –bien sea desde la perspectiva de la Escuela de Ginebra (conflicto socio-cognitivo), bien sea desde la perspectiva vygotskiana (zona de desarrollo potencial)–, como desde planteamientos específicos (investigaciones específicas sobre aprendizaje cooperativo), se ha puesto de manifiesto la rentabilidad de estos procesos en relación de colaboración, de cooperación o de tutoría (Serrano, González-Herrero & Pons, 2008; Pons, González-Herrero & Serrano, 2008).

Finalmente, en esta caracterización se subraya que el conocimiento matemático no solo se debe circunscribir a su carácter formal, sino también al funcional. Por eso, parece necesario que en los procesos de co-construcción se incluyan aspectos relativos a la utilización del conocimiento matemático en relación con problemas y situaciones del entorno físico y social inmediato, y como instrumento de representación y comunicación de determinados tipos de informaciones y mensajes habituales en el contexto cultural donde esos procesos se producen.

En resumen, la construcción del conocimiento matemático debe permitir a los sujetos enfrentarse a las demandas de su entorno social y cultural en sus distintas esferas: educativa, laboral, privada, social y comunitaria. Esta finalidad global implica que la educación matemática puede y debe contribuir al desarrollo y a la socialización de los individuos, así como a la adquisición de un conjunto amplio de capacidades necesarias para actuar como ciudadanos competentes, activos, implicados y críticos: de pensamiento autónomo e independiente, de exploración e indagación, de pensamiento divergente y creativo, de identificación y resolución de problemas, de modelización de situaciones extra-matemáticas reales, de análisis y valoración de los usos y roles de las matemáticas en el contexto social, de comprensión de las nuevas tecnologías de la información en relación con las matemáticas, etc.

Los conocimientos matemáticos previos

Si la caracterización efectuada determina que la competencia matemática solo se puede adquirir a través de un proceso continuado de construcción por parte del sujeto, cabría preguntarse: ¿dónde comienza el proceso de construcción del conocimiento matemático?

Todos los sujetos poseen una amplia base de conocimiento matemático que incluye nociones, habilidades y estrategias relativas a un amplio conjunto de aspectos (numeración, conteo, proporcionalidad, combinatoria, porcentajes, etc.) y que es fruto de su participación en situaciones y contextos específicos propios de la vida cotidiana. Aunque este conocimiento pueda presentar, desde el punto de vista formal y en determinados casos, algunas imprecisiones y limitaciones, su consideración y recurrencia es la base para una construcción adecuada de las nociones matemáticas. Pero tal conocimiento se ignora muchas veces en el ámbito escolar porque se considera y se denomina, no sin una cierta desconsideración propia de la altivez del ignorante, "conocimiento matemático informal".

A nuestro juicio, esta impresión sobre el conocimiento matemático que se extrae de las acciones efectuadas por el sujeto sobre su entorno, suele ser objeto de una matización que no conduce a ninguna parte: distinguir entre conocimiento formal e informal. Si reflexionamos un poco, nos daremos cuenta que conocer es saber hacer comprendiendo las razones. Esto es formal, diríamos que muy serio y muy formal, y eso es conocer, nos guste o no. Sin embargo, no es difícil encontrar en la actualidad expresiones como: "los niños de estas edades utilizan mecanismos informales para solucionar situaciones problema que les planteamos en relación con situaciones de recuento (utilización de los dedos, movimiento de la cabeza) que poco a poco se formalizarán mediante la utilización del número" (Bassedas, Huguet & Solé, 2003; p. 87). Pues bien, la referencia a los objetos y/o al cuerpo, no supone, en absoluto, la utilización de mecanismos o procedimientos informales, sino mecanismos o procedimientos psicológicos que dan cuenta del paso de la centración a la descentración (utilizando una terminología piagetiana) o de la subjetividad a la objetividad por el intermediario de la intersubjetividad (utilizando una terminología vygotskiana).

En efecto, admitamos o no el principio haeckeliano de que la ontogénesis recapitula la filogénesis (ley fundamental biogenética), todos los historiadores del pensamiento matemático están de acuerdo en aceptar la existencia inicial de unos números corporales (Rey & Babini, 1984, p. 17). Estos números corporales comienzan siempre, y de manera muy especial, centrados en los dedos de la mano, lo que no parece una situación caprichosa de los hombres primitivos, desde el momento en que, a partir de los trabajos iniciales de Gerstmann (1924) y el posterior diagnóstico diferencial efectuado por Kleist (1934), sabemos que la acalculia va siempre asociada a una agnosia digital, por lo que estos autores llaman poderosamente la atención sobre la correlación íntima existente entre el reconocimiento de los dedos de la mano y las primeras adquisiciones del cálculo (Hasaerts, 1972). No es, por tanto, de extrañar que los niños (como el hombre primitivo) «cuenten con los dedos» (no «cuentan los dedos»). De hecho, la palabra dígito utilizada para referirnos a las cifras 1 a 9, ambas inclusive, hace referencia a la expresión romana *numerare per dígitos* (contar por los dedos).

El que los procedimientos iniciales de cálculo tengan un origen neurológico, no significa, de ninguna manera, que sean procedimientos informales de cálculo. Como tampoco que los conocimientos matemáticos del hombre primitivo, por el hecho de tener un origen práctico, fueran conocimientos matemáticos informales. El ladrillo con que el hombre primitivo construía sus casas y sus tumbas, aportó la noción de ángulo recto. El concepto de línea (y su nombre) deriva de la forma de la fibra del lino. Otros muchos conceptos matemáticos tienen su origen en movimientos (ya de las danzas primitivas, ya del caminar de los astros en el cielo...). Heródoto, en un conocido pasaje de su *Historia*, decía:

> El rey de Egipto dividió el suelo del país entre sus habitantes, asignando lotes cuadrados de igual ex-

tensión a cada uno de ellos y obteniendo sus principales recursos de las rentas que cada poseedor pagaba anualmente. Si el río arrasaba una parte del lote de un habitante, este se presentaba al rey y le exponía lo ocurrido, a lo cual el rey enviaba personas a examinar y medir la extensión exacta de la pérdida y más adelante la renta exigida era proporcional al tamaño reducido del lote.

El hecho de que la noción de proporcionalidad, a la que hacía referencia Heródoto, venga de la necesidad de aplicar una ley con justicia, la de ángulo recto, de un ladrillo, la de línea, de una fibra textil, etc., no permite catalogar estos conocimientos de informales. Más aún, la investigación actual corrobora que la mejor manera de adquirir el conocimiento matemático es en el seno de un contexto relevante de aplicación y toma de decisiones específicas. En este sentido, la resolución de problemas, y no tanto el aprendizaje estructural y poco contextualizado de la matemática, es el entorno que enmarca y da sentido al uso de la matemática en el ámbito escolar. Así entonces, el alumno puede ir progresando desde el pensamiento narrativo y contextualizado propio de la aproximación intuitiva y cotidiana a los fenómenos, al pensamiento paradigmático propio de las matemáticas como sistema formal, merced a un proceso gradual que parte de los conocimientos previos del alumno y avanza hacia niveles cada vez más elevados de complejidad y abstracción (Barberá & Gómez-Granell, 1996).

Aunque las ideas que acabamos de exponer son aceptadas por la mayor parte de los especialistas e investigadores actuales, que desde la perspectiva de la psicología de la instrucción o de las didácticas específicas estudian los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es necesario remarcar que otras maneras de entender el aprendizaje de las matemáticas han tenido y tienen todavía un importante predicamento, fundamentalmente en la praxis instruccional. Este es el caso de otras caracterizaciones, de corte más individualistas y con un carácter más evolutivo, en las que la secuencia de adquisición del conocimiento matemático se vincula al desarrollo de determinadas capacidades cognitivas por parte del alumno; o aquellas que presentan una tendencia de carácter estructuralista, en que la lógica interna de las matemáticas como sistema formal es la que marca la secuencia de aprendizaje que debe seguir el alumno.

El modo de hacer matemáticas

Otro tópico que daña bastante el "hacer matemático" es el de verdad absoluta (a las matemáticas se las llama *ciencias exactas*). Dejemos que Krieger (1991), uno de los más importantes filósofos de la matemática en la actualidad, nos desgrane esta cuestión. Postula este autor un conjunto de afirmaciones bastante esclarecedoras:

Los teoremas matemáticos, dice Krieger, son objetos interpretables culturalmente, lo mismo que lo pueden ser las obras de arte. Al tomarse separados del contexto cultural, los teoremas se enfocan de modo trascendente y se ven como analíticos o verdaderos por su ser, dada la verdad por la demostración que hace el matemático (como el artista su obra); o sintéticos, y se les admite como verdaderos por su correspondencia y localización en la historia y el mundo.

Está muy claro que las matemáticas son un instrumento de transmisión de la cultura; por tanto, las verdades matemáticas son verdades en el espacio y en el tiempo y nunca verdades absolutas.

En otro pasaje de su artículo, Krieger nos dice que la matemática es un instrumento y un oficio. Como instrumento es útil porque se adapta al material que encuentra, es decir, al mundo natural y a las ciencias. Pero, a la vez, ese material también se adapta para ponerse de acuerdo con las capacidades matemáticas. Un acuerdo nunca perfecto, con lagunas entre ambos polos, que obliga a realizar modificaciones en la matemática para ponerse de acuerdo con el material que la entorna; pero también el mundo, el material, tiene que modificarse para esa adaptación.

Igualmente, las matemáticas son un instrumento de asimilación para acomodarnos al mundo que nos rodea, es decir, para conferir un significado a lo real (Serrano, 2008). Cuanto más poderoso sea este instrumento de asimilación, se le podrán conferir a la realidad significados cada vez más ricos. La utilidad de las matemáticas está, por tanto, en su poder para explicar el mundo y tratar de desconectar las primeras del segundo será, en consecuencia, un error aberrante.

El maestro que enseña matemáticas debe conectar estas con la realidad para no parecerse al matemático que describe P. Simons (1990): "el matemático *qua* matemático no le parece esencial reflexionar acerca de lo que hace y de lo que dice" (p. 18), con lo que, instalado en el mundo de las ideas, se transforma en un platónico que maneja objetos abstractos separados del espacio y del tiempo, y totalmente ajenos a la realidad que circunda al sujeto que aprende.

En este sentido, sorprende que los problemas que se formulan en los libros de texto del siglo XXI, tengan la misma estructura que los problemas matemáticos formulados en los libros de matemáticas del siglo VII. Tomemos un ejemplo. Los grandes matemáticos y astrónomos de la India como Brahmagupta, autor del *Brahmasphutasiddhanta* (tratado de Aritmética), que está considerado como el más grande matemático de su época, o Báskara, autor del *Lilavati* (Tratado de Álgebra y Geometría), formularon en sus libros colecciones de problemas, uno de los cuáles formulamos en los mismos términos que aparecen en ellos:

> Hermosa muchacha de luminosos ojos, dime: ¿cuál es el número que multiplicado por 3, aumentado los ¾ del producto, dividido por 7, disminuido en un tercio del cociente, multiplicado por sí mismo, restándole 52, mediante la extracción de la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndole por 10, el resultado es dos?

Evidentemente, eliminando hipérboles y retruécanos, esa estructura no difiere mucho de esta otra tomada de un libro de texto de Educación Primaria:

> "Calcula los ¾ de ½ de 320"

Finalmente, Krieger postula que el oficio docente de las matemáticas debe tomar en cuenta que la enseñanza contiene un ímpetu, lo que se califica de motivación. Esto no está escrito en parte alguna, pero se transmite en la pizarra o el papel, en el planteamiento de tareas y actividades individuales o colectivas. La motivación proviene de la ejemplificación, de la anécdota, y es de tipo más bien general y cultural aunque se utilice una jerga semitécnica de la subcultura propia del matemático.

La única enseñanza válida de las matemáticas, sea cual sea el prisma que se utilice, debe partir de la realidad y debe tener como destinataria esa misma realidad (Krieger, 2003).

Desde que Paul Benacerraf (1973) publicara su célebre *dilema* ("lo que parece necesario para la verdad en la matemática hace imposible el conocimiento de esa verdad; lo que haría posible el conocimiento matemático hace imposible la verdad del mismo"), conocemos los cuatro elementos esenciales del saber matemático:

- El conocimiento matemático se basa en una posición epistemológica (que se ha dado en llamar epistemología del sentido común) de naturaleza causal.
- El conocimiento matemático exige la interacción entre el sujeto y el objeto.
- Los objetos matemáticos son entidades existentes.
- Los objetos matemáticos no pueden ser entidades abstractas y han de estar localizados espacio-temporalmente.

Esto nos lleva a concluir que el objeto matemático existe (luego es un contenido instruccional), que no es una entidad abstracta (luego hay que concretizarlo), que no puede conocerse sino mediante la interacción del sujeto con él (luego debe conocerlo en acción) y que la única manera de conocerlo es mediante mecanismos causales (luego no puede desligarse de la realidad).

CONCLUSIONES

Las investigaciones sobre la construcción del conocimiento matemático y muy especialmente aquellas que lo hacen en base a la integración de habilidades, han sido muy prolíficas y han dado lugar a la aparición de muchos modelos interpretativos, fundamentalmente a partir del último cuarto de siglo. En efecto, los trabajos de la Escuela de Ginebra durante el tercer cuarto del siglo precedente (1950-1975) y el impacto de Piaget en los Estados Unidos de América en el último tercio de esa misma centuria, especialmente en las décadas de los «70» y de los «80», junto con la aparición de las teorías del procesamiento de la información, dio paso a un conjunto de propuestas integradoras entre ambas concepciones y modelos teóricos, que, bajo el nombre de neopiagetianas, posibilitaron y abrieron el camino para numerosos y fructíferos trabajos acerca de la construcción de los objetos matemáticos.

En el momento actual, los derroteros de la investigación en instrucción matemática, además de la investigación específica sobre la organización y los procesos de la cognición matemática, se sitúan en torno a elementos que emanan del paradigma constructivista, como el rol del discurso y el lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas y en la manera de abordar el reto de la complejidad del contexto (Edwards, Esmonde & Wagner, 2011).

Sin embargo, estos descubrimientos altamente enriquecedores para la psicopedagogía de las matemáticas no han conllevado avances equivalentes en la práctica docente. En estas circunstancias, el desfase investigación-praxis se hace cada vez más patente en nuestras aulas, al punto que hemos llegado a cotas de rendimiento escolar muy preocupantes en esta disciplina y que, en definitiva, suponen que la mayoría de los alumnos no alcanzan niveles adecuados de comprensión matemática. Aunque esta situación es similar para numerosos países, nos referiremos en concreto a los casos de España y Colombia.

Para el caso de España, en un trabajo sobre psicopedagogía financiado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia, Eduardo Martí (1996) concluye respecto a las matemáticas que el 86% de los alumnos de 13 años no alcanza el nivel de comprensión correspondiente a su edad. También el informe PISA de 2003, cuyo foco principal eran las matemáticas, revela que un 20% de los alumnos de secundaria son incapaces de resolver con éxito un problema aritmético básico. De la misma forma, podemos observar que las distintas evaluaciones realizadas por el Instituto Nacional de Calidad Educativa (INCE) muestran que el 50% de los escolares españoles no alcanza en matemáticas la nota media exigida. Además, las puntuaciones en esta materia son las más bajas de todas, tanto si nos referimos a educación primaria, como a la educación secundaria obligatoria.

En los estudiantes colombianos, la situación no es muy distinta. Así por ejemplo, los resultados en pruebas nacionales (ICFES, 2009), e internacionales (PISA, 2006), Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo-SERCE (2006), muestran que el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes evaluados, no presenta los avances esperados, identificándose en ellos serias dificultades en la resolución de problemas y en el razonamiento de los mismos.

A pesar de las críticas que este tipo de estudios internacionales de carácter transcultural suelen tener (Kaiser, Luna & Huntley, 1999) y de las múltiples interpretaciones a las que están sujetos (Macnab, 2000), no se puede refutar el hecho de que tanto los escolares españoles como colombianos se encuentran por debajo de la media de los países de la OCDE y que "sus puntuaciones en matemáticas son escandalosamente bajas" (Bermejo, Lago, Rodríguez, Dopico & Lozano, 2002, p. 5).

Ante esta situación, son inevitables las preguntas sobre cuándo, cómo y por qué se inicia este fracaso. Y la respuesta básicamente es la misma para las tres: hay una deficiente instrumentalización de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se inicia, prácticamente, desde la educación infantil (Serrano, 2008).

En este sentido, sería bueno retomar un decálogo sobre la enseñanza de las matemáticas y colocarlo de cabecera en todas nuestras aulas:

1. Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en actividades auténticas y significativas para los alumnos.
2. Orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas.
3. Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial.

4. Activar y emplear como punto de partida el conocimiento matemático previo, formal e informal, de los alumnos.
5. Avanzar de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de abstracción y generalización.
6. Enseñar explícitamente y de manera informada estrategias y habilidades matemáticas de alto nivel.
7. Secuenciar adecuadamente los contenidos matemáticos, asegurando la interrelación entre las distintas capacidades implicadas en la adquisición del conocimiento matemático.
8. Apoyar sistemáticamente la enseñanza en la interacción y la cooperación entre alumnos.
9. Ofrecer a los alumnos oportunidades suficientes de «hablar matemáticas» en el aula.
10. Atender los aspectos afectivos y motivacionales implicados en el aprendizaje y dominio de las matemáticas.

REFERENCIAS

Barberá, E. & Gómez, C. (1996). Las estrategias de enseñanza y evaluación en matemáticas. En C. Moreno e I. Solé (Coords.). *El asesoramiento psicopedagógico: una perspectiva profesional y constructivista*. (pp. 383-404) Madrid: Alianza.

Bassedas, E.; Huguet, T. & Solé, I. (2003). *Aprender y enseñar en Educación Infantil*. Barcelona: Graó.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy*, 70, 661-679.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C. & Lozano, M. J. (2002). *PEI: Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Editorial Complutense.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós [Publicación original en inglés en 1991].

Brousseau, M. (1983). Les obstacles epistémologiques et les problèmes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 4(2), 165-198.

Bruning, R. H., Schraw, G. J. & Ronning, R. R. (2002). *Psicología cognitiva e instrucción*. Madrid: Alianza.

De Lorenzo, J. (2000). *Filosofía de la matemática fin de siglo XX*. Valladolid: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid.

Edwards, A. R., Esmonde, I. & Wagner, J. F. (2011). Learning Mathematics. En R. E. Mayer y P. A. Alexander (Eds.). *Handbook of Research on Learning and Instruction* (pp. 55-77). New York, NY: Routledge.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press.

Ernest, P., Greer, B. & Sriraman, B. (Eds.) (2009). *Critical Issues in Mathematics Education*. Greenwich, CT: Age Publisihing.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gerstmann, J. (1924). Fingeragnosie: eine umschriebene störung der orientierung am eigenen körper. *Wiener Klinische Wochenschrift*, 37, 1010-1012.

Hasaerts-Van Geertruyde & Delfosse, F. (1972). Psychomotor rehabilitation in a case of dyscalculia. Importance of gestural integration. *Revue de Neuropsychiatrie Infantil*, 20(10), 753-759.

ICFES (2009). *Informes SABER 5º y 9º. Resultados nacionales. Resumen Ejecutivo*. Bogotá: ICFES. Recuperado de http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/INFORME_SABER.pdf

Inhelder, B. & Piaget, J. (1979). Procédures et structures. *Archives de Psychologie*, XLVII, 165-176.

Kaiser, G., Luna, E. y Huntley, I. (1999). *International comparisons in mathematics education*. London: Falmer Press.

Kitcher, P. (1988a). Mathematical naturalism. En W. Aspray y P. Kitcher (Eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minnesota Studies in the Philosophy of Science XI (293-325). Minneapolis: University of Minnesota Press.

Kitcher, P. (1988b). Mathematical Progress. *Revue Internacional de Philosophie*, 167, 518-540.

Kleist, K. (1934). *Kriegsverletzungen des Gehirns in ihrer Bedeutung für die Hirnlokalisation und Hirnpathologie*. Leipzig: Barth.

Krieger, M. H. (1991). Theorems as Meaningful Cultural Artefacts: Making the World Additive. *Synthese*, 88, 135-154.

Krieger, M. H. (2003). *Doing Mathematics*. River Edge, NJ: World Scientific Publishing.

Macnab, D. (2000). Raising standards in mathematics education: Values, visión, and TIMSS. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 61-80.

Martí, E. (1996). Psicopedagogía de las matemáticas. En J. Escoriza, R. González Cabanach, A. Barca & J.A. González Pienda (Eds.). *Psicología de la Instrucción. Volumen 5: Psicopedagogías específicas: áreas curriculares y procesos de intervención* (pp. 1-29). Barcelona: EUB.

Onrubia, J., Rochera, M. J. & Barberá, E. (2004). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: Una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comps.). *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 461-508). Madrid: Alianza.

Papert, S. (1983). Enseñar a los niños a ser matemáticos versus enseñar matemáticas a los niños. En C. Coll (Comp.). *Psicología genética y aprendizajes escolares* (pp. 129-148). Madrid: Siglo XXI.

Peña, M., Santaolalla, E., Aranzubía, V. y Sanz, B. (2010). *Matemáticas 5 Primaria*. Madrid: S.M.

Piaget, J. (1976). Le possible, l'impossible et le nécessaire. *Archives de Psychologie*, 44, 281-289. (Traducción castellana en *Monografías de Infancia y Aprendizaje*, 2; 1981; 108-121).

PISA (2006). *Programa Internacional para la evaluación de estudiantes*. Recuperado de http://www.mec.es/multimedia/00005713.pdf

Pons, R. M. & Serrano, J. M. (2011). La adquisición del conocimiento: una perspectiva cognitiva en el dominio de las matemáticas. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 117-138.

Pons, R. M., González-Herrero, M. E. & Serrano, J. M. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Anales de Psicología*, 24(2), 253-261.

Rey, J. & Babini, J. (1984). *Historia de la Matemática*. Vol. 1. De la Antigüedad a la Baja Edad Media. Barcelona: Gedisa.

Royer, J. M. (Ed.) (2003). *Mathematical Cognition: A Volume in Current Perspectives on Cognition, Learning, and Instruction*. Greenwich, CT: Age Publishing.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (334-370). Nueva York: Macmillan.

SERCE (2006). *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo. Aportes para la enseñanza de la matemática*. Santiago de Chile: OREALC/UNESCO y LLECE. Recuperado el 20 de marzo de 2011 de http://diniece.me.gov.ar/images/stories/diniece/evaluacion_educativa/internacionales/Aportes%20Matematicas.pdf

Serrano, J. M. (2005). *La construcción del concepto de número: Implicaciones para la Educación Infantil*. Valladolid: Editorial de la Infancia.

Serrano, J. M. (2008). Acerca de la naturaleza del conocimiento matemático. *Anales de Psicología*, 24(2), 169-179.

Serrano, J. M., González-Herrero, M. E. & Pons, R. M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas. Diseño de actividades en Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Murcia: Edit.um.

Simons, P. (1990). What is abstraction & what is it good for? En A. D. Irvine (Ed.). *Physicalism in Mathematics* (17-40). Dordrecht: Kluwer Academic Press.